УДК 536.2.01

ТЕПЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

М. Г. САЛЬНИКОВА
Южно-Российский государственный технический университет (НПИ), г. Новочеркасск, Российская Федерация

Введение

Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса состоит из уравнения энергии и закона Максвелла, учитывающего релаксацию теплового потока:

$$c\frac{\partial T}{\partial t}+div\boldsymbol{q}=q_{\upsilon},\ \boldsymbol{q}+\gamma\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}=-\lambda\,\mathrm{grad}T. \qquad (1)$$

Здесь приняты обозначения: T – температура; $\boldsymbol{q}(q_1,q_2)$ – вектор удельного теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности; c – объемная теплоемкость; γ – время релаксации теплового потока; q_{υ} – мощность внутренних источников энергии; t – время; x, y – прямоугольные декартовы координаты. Современные методы нелинейного анализа уравнений (1) и их разнообразные физические приложения изложены в [1].

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию аналитических подходов к решению двумерных уравнений локально-неравновесного теплопереноса в нелинейных средах. Наша цель состоит в следующем: 1) построить новое точное решение, которое характеризуется функциональной зависимостью между искомыми функциями (двойная волна); 2) показать возможность существования релаксирующих тепловых процессов, математическое описание которых аналогично квазичаплыгинским уравнениям идеального политропного газа, обладающего термодинамически аномальной сжимаемостью; 3) получить уравнения теплового маятника.

Двойная волна

Допустим, что теплофизические свойства среды описываются степенными функциями температуры:

$$\lambda=\lambda_0T^{n_1},\quad c=c_0T^{n_2},\quad \gamma\equiv\text{const},\quad q_{\upsilon}=Q_0T^{1+n_2},$$

$$\lambda_0,c_0,Q_0-\text{const}.$$

Процесс происходит в плоской двумерной области (x, y). Температуру и тепловой поток представим в виде:

$$T=\tau^{H}\theta(x,y,\tau),\quad q_1=k\tau^{n}r(x,y,\tau),\quad q_2=k\tau^{n}\upsilon(x,y,\tau),$$

$$\tau=\exp(-kt),\quad m_2U=c_0\theta^{m_2},\quad R=a_1U^{\beta+1},\quad \beta=(n_1-n_2)/m_2,$$

$$\gamma kn=1,\quad m_2=1+n_2>0,\quad Q_0=-Hkc_0,\quad Hm_2+1=n,\quad Hm_2\beta=2,$$

$$a_0=\frac{\lambda_0}{c_0}\left(\frac{m_2}{c_0}\right)^{\beta},\ \ a_1=\frac{a_0}{\gamma(\beta+1)k^2},\ \ \beta+1\neq 0,\ \ m_1=1+n_1.$$

Тогда уравнения (1) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\quad \frac{\partial r}{\partial \tau}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}=\frac{\partial R}{\partial y}. \tag{2}$$

Данные формулы показывают, что параметр нелинейности среды β нужно брать по обе стороны значения $\beta=-1.$ Будем применять обозначения:

$$\tau=\tau^1 a_2,\quad a_2=\left[\left(\frac{1}{\pm a_1}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\frac{(\pm 1)}{(\beta+1)}\right]^{1/2},$$

$$\pm\upsilon=\upsilon^1 a_2,\quad \pm r=r^1 a_2,\quad \pm R\to R,\quad U=\left(\frac{\pm R}{\pm a_1}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Здесь берем знак «+» при $\beta+1>0,$ знак «–» при $\beta+1<0.$ В обоих случаях система уравнений (2) преобразуется в уравнения

$$R^{\frac{-\beta}{\beta+1}}\frac{\partial R}{\partial \tau^1}=\frac{\partial r^1}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon^1}{\partial y},\quad \frac{\partial r^1}{\partial \tau^1}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial \upsilon^1}{\partial \tau^1}=\frac{\partial R}{\partial y}, \tag{3}$$

которые содержат неизвестные функции $r^1,$ $\upsilon^1,$ R аргументов $x,y,\tau^1.$ Построим точное решение уравнений (3), взяв за основу алгоритм [2], который применялся в теории околозвуковых течений идеального газа. В классе двойных волн переменные $r^1,$ υ^1 являются независимыми на некоторой поверхности $\Sigma: R=R(r^1,\upsilon^1).$ Уравнения для компонент вектора теплового потока становятся такими:

$$\frac{\partial r^1}{\partial \tau^1}=\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \upsilon^1}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial r^1}{\partial x},\quad \frac{\partial \upsilon^1}{\partial \tau^1}=\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \upsilon^1}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial r^1}{\partial y}.$$

Применяем эти формулы и дифференциальное следствие $\partial\upsilon^1/\partial x=\partial r^1/\partial y.$

Уравнение энергии записываем в виде:

$$\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial r^1}{\partial x}+2R^{\beta_1}\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \upsilon^1}{\partial x}+\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial \upsilon^1}{\partial y}=0.$$

Здесь $\beta_1=-\beta/(\beta+1).$ Выполняем преобразование годографа $(x,y)\leftrightarrow(r^1,\upsilon^1),$ учитывая, что каждая плоскость $\tau^1=\text{const}$ физического пространства отображается в пространстве годографа на одну и ту же поверхность $\Sigma.$ Следовательно,

$$\frac{\partial r^1}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \upsilon^1},\ \frac{\partial r^1}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \upsilon^1},\ \frac{\partial \upsilon^1}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial r^1},\ \frac{\partial \upsilon^1}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial r^1},$$

$$J=\frac{\partial x}{\partial r^1}\frac{\partial y}{\partial \upsilon^1}-\frac{\partial x}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial y}{\partial r^1},\quad \frac{1}{J}=\frac{\partial r^1}{\partial x}\frac{\partial \upsilon^1}{\partial y}-\frac{\partial r^1}{\partial y}\frac{\partial \upsilon^1}{\partial x},$$

$$\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial x}{\partial r^1}-2R^{\beta_1}\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial y}{\partial r^1}+\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial y}{\partial \upsilon^1}=0.$$

На основе второго и третьего уравнений в (3) построим скалярный потенциал $\varphi=\varphi(x,y,\tau^1)$:

$$d\varphi=r^1dx+\upsilon^1dy+Rd\tau^1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau^1}=R,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=r^1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\upsilon^1.$$

Теперь введем в алгоритм функцию $\chi=R\tau^1+\upsilon^1y+r^1x-\varphi.$ После простых вычислений находим:

$$d\chi=\left(x+\tau^1\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)dr^1+\left(y+\tau^1\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)d\upsilon^1,$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial r^1}=x+\tau^1\frac{\partial R}{\partial r^1},\quad \frac{\partial\chi}{\partial \upsilon^1}=y+\tau^1\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}. \tag{4}$$

Если эти формулы продифференцировать при $\tau^1=\text{const},$ то получим:

$$\frac{\partial x}{\partial r^1}=\frac{\partial^2\chi}{\partial(r^1)^2}-\tau^1\frac{\partial^2R}{\partial(r^1)^2},\quad \frac{\partial y}{\partial r^1}=\frac{\partial^2\chi}{\partial\upsilon^1\partial r^1}-\tau^1\frac{\partial^2R}{\partial\upsilon^1\partial r^1},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \upsilon^1}=\frac{\partial^2\chi}{\partial(\upsilon^1)^2}-\tau^1\frac{\partial^2R}{\partial(\upsilon^1)^2}.$$

Итогом преобразований является запись уравнения энергии в плоскости годографа:

1) уравнение для функции $R(r^1,\upsilon^1)$ получается после группировки членов, содержащих τ^1:

$$\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial^2 R}{\partial (r^1)^2}-2R^{\beta_1}\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial^2 R}{\partial\upsilon^1\partial r^1}+\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial^2 R}{\partial (\upsilon^1)^2}=0; \tag{5}$$

2) уравнение для функции $\chi(r^1,\upsilon^1)$ получается после группировки членов, содержащих τ^1 в нулевой степени:

$$\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial^2 \chi}{\partial (r^1)^2}-2R^{\beta_1}\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial R}{\partial r^1}\frac{\partial^2 \chi}{\partial\upsilon^1\partial r^1}+\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)^2-1\right]\frac{\partial^2 \chi}{\partial (\upsilon^1)^2}=0.$$

После решения этих уравнений переход к физической плоскости выполняется по формулам (4). Если процесс автомодельный, то $\chi=0,$ $x/\tau^1=-\partial R/\partial\tau^1,$ $y/\tau^1=-\partial R/\partial\upsilon^1.$

Укажем несколько важных примеров, когда уравнение двойной волны удается преобразовать к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Уравнение (5) имеет частное решение:

$$\xi=r^1/\upsilon^1,\quad R=(\upsilon^1)^A f(\xi),\quad A=2(\beta+1)/(\beta+2).$$

Задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left[f^{\frac{-\beta}{\beta+1}}\left(Af-\xi\frac{df}{d\xi}\right)^2-1\right]\frac{d^2f}{d\xi^2}-2f^{\frac{-\beta}{\beta+1}}\left(Af-\xi\frac{df}{d\xi}\right)\frac{df}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\left(Af-\xi\frac{df}{d\xi}\right)+$$
$$+\left[f^{\frac{-\beta}{\beta+1}}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2-1\right]\left[(A-1)\left(Af-\xi\frac{df}{d\xi}\right)-\xi\frac{d}{d\xi}\left(Af-\xi\frac{df}{d\xi}\right)\right]=0.$$

Другая форма записи выглядит так:

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}\left[A^2f^{2+\beta_1}+2\xi^2f^{\beta_1}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2-\xi^2-1\right]+\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2\left[A(1-A)f^{1+\beta_1}\right]+$$
$$+\left[A(1-A)f+2(A-1)\xi\frac{df}{d\xi}\right]=0.$$

Допустим, что

$$R=R(\omega),\quad \omega=\left[(\upsilon^1)^2+(r^1)^2\right]^{1/2}.$$

Тогда из уравнения (5) выводим:

$$\omega\frac{d^2R}{d\omega^2}-R^{\beta_1}\left(\frac{dR}{d\omega}\right)^3+\frac{dR}{d\omega}=0. \tag{6}$$

Применяя логарифмический аргумент $z=\ln\omega,$ получаем:

$$R=\omega^{\alpha}B(z),\ \ \alpha=2(\beta+1)/(\beta+2),$$

$$\alpha\left(\alpha B+\frac{dB}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(\alpha B+\frac{dB}{dz}\right)-B^{\beta_1}\left(\alpha B+\frac{dB}{dz}\right)^3=0.$$

Это уравнение имеет простое частное решение $B = B_0 = \text{const}$: $B_0=\alpha^{-\alpha/2}$.

Понизив на единицу порядок уравнения, находим:

$$\frac{dB}{dz}=D(B),\quad \frac{d^2B}{dz^2}=D\frac{dD}{dB};\quad \alpha\neq 0,\quad \beta+1\neq 0;$$

$$D\frac{dD}{dB}=B^{\beta_1}(\alpha B+D)^3-\alpha^2B-2\alpha D.$$

Если пользоваться вместо $R=R(\omega)$ обратной функцией $\omega=\omega(R),$ то (6) принимает вид:

$$\frac{dR}{d\omega}=\frac{1}{d\omega/dR}=\frac{1}{\dot\omega},\quad \frac{d^2R}{d\omega^2}=\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{\dot\omega}\right)\frac{1}{\dot\omega}=-\frac{\ddot\omega}{\dot\omega^3};$$

$$\omega\ddot\omega=\dot\omega^2-R^{\frac{-\beta}{\beta+1}}.$$

Применяя здесь логарифмический аргумент $y=\ln R,$ получаем:

$$\omega=R^nB_1(y),\quad n=1/\alpha=(\beta+2)/[2(\beta+1)],$$

$$B_1\left[(n-1)\left(nB_1+\frac{dB_1}{dy}\right)+\frac{d}{dy}\left(nB_1+\frac{dB_1}{dy}\right)\right]+1=\left(nB_1+\frac{dB_1}{dy}\right)^2.$$

Данные примеры позволяют рассматривать существенно двумерные тепловые конфигурации для частных значений параметра нелинейности среды β.

Теперь возвратимся к уравнению (5). Для него дифференциальное уравнение характеристик такое:

$$\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial r^1}\right)^2-1\right](dr^1)^2+2R^{\beta_1}\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial R}{\partial r^1}d\upsilon^1 dr^1+\left[R^{\beta_1}\left(\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}\right)^2-1\right](d\upsilon^1)^2=0.$$

Вдоль поверхности Σ имеем

$$dR=\frac{\partial R}{\partial r^1}dr^1+\frac{\partial R}{\partial \upsilon^1}d\upsilon^1,$$

поэтому характеристические кривые S_+, S_- на поверхности Σ определяются уравнением

$$R^{\beta_1}(dR)^2=(dr^1)^2+(d\upsilon^1)^2.$$

Решение этого уравнения получаем в параметрической форме:

$$\pm R=\left(\frac{h}{|\alpha|}\right)^{\alpha},\quad r^1=\int\sin f(h)dh+\text{const},\quad \upsilon^1=\int\cos f(h)dh+\text{const},\quad \alpha=2(\beta+1)/(\beta+2),$$

где $h>0$ – параметр; $f(h)$ – произвольная функция. На плоскости (x,y) основная формула решения имеет вид:

$$x\sin f(h)+y\cos f(h)+(h/|\alpha|)^{\alpha-1}\tau^1+F(h)=0, \tag{7}$$

где $F(h)$ – произвольная функция. Вычисление частных производных выполняется с помощью соотношений:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\sin f}{S},\quad \frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{\cos f}{S},\quad \frac{\partial h}{\partial \tau^1}=-\frac{1}{S}\left(\frac{h}{|\alpha|}\right)^{\alpha-1},$$

$$S=\dot F(h)+x\dot f(h)\cos f-y\dot f(h)\sin f+\frac{(\alpha-1)\tau^1}{|\alpha|}\left(\frac{h}{|\alpha|}\right)^{\alpha-2};$$

$$\frac{\partial r^1}{\partial \tau^1}=\frac{\partial r^1/\partial h}{\partial \tau^1/\partial h},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R/\partial h}{\partial x/\partial h}\ \text{и т. п.}$$

Здесь $\alpha>0$ при $\beta+1>0$ либо при $\beta+2<0$. Если $\beta\in(-2,-1)$, то $\alpha<0$. При работе с аргументом $\tau=\exp(-kt)$ нужно учитывать, что $\gamma k=\beta/(\beta+2)$, поэтому:

1) при $\beta>0$ либо $\beta+2<0$ будет $k>0$, т. е. $\tau\in(0,1]$;

2) при $\beta\in(-2,0)$ будет $k<0$, т. е. $\tau\in[1,\infty)$.

Вместе с тем верна формула

$$k=\frac{1}{\gamma}+\frac{Q_0 m_2}{c_0},$$

поэтому вариант $k<0$ получается для стока энергии $(Q_0<0)$ достаточно большой интенсивности; вариант $k>0$ – для источника энергии $(Q_0>0)$ либо для стока энергии с не слишком большим $|Q_0|$.

Температура и компоненты вектора теплового потока определяются формулами:

$$T^{m_2}=\frac{m_2}{c_0}\left(\frac{1}{|a_1|}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\left(\frac{h}{|\alpha|}\right)^{\frac{2}{\beta+2}}\tau^{2/\beta}; \qquad (8)$$

$$q_1=k\tau^n\left[\pm a_2\int\sin f(h)dh+r^0\right],\ q_2=k\tau^n\left[\pm a_2\int\cos f(h)dh+\upsilon^0\right]. \qquad (9)$$

Это решение содержит, учитывая (7), две произвольные функции $f(h)$, $F(h)$ и две произвольные постоянные r^0, υ^0. Каждой изотерме $T=\text{const}$, $h=h(T,\tau)$ соответствует пара прямых линий (7), расположенных симметрично относительно оси OY. Значит, можно рассматривать симметричное тепловое поле в двух областях: $x\le 0$ и $x\ge 0$. На оси симметрии $x=0$ тепловое поле непрерывно.

Точное решение (7)–(9) дает возможность изучать некоторые нестационарные краевые задачи в плоской двумерной области клиновидной формы.

Квазичаплыгинская среда

Работаем с уравнениями (3). Возьмем для определенности $\beta\in(-2,0)$, т. е. считаем, что в среде присутствует сток энергии достаточно большой интенсивности: $Q_0<0$, $k<0$, $\tau\in[1,\infty)$, $\beta\ne -1$. Запишем уравнение энергии в виде нелинейного волнового уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\tau^1}\left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\tau^1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right),\quad \widetilde{U}/(\beta+1)=R^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Допустим, что функция R зависит только от двух аргументов ξ, y, где $\xi=x-b\tau^1$, $b\equiv\text{const}$ – автомодельная переменная. Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(b^2\widetilde{U}-R)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right).$$

Строим скалярный потенциал $V(\xi,y)$:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial V}{\partial y}dy;$$

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial P(R)}{\partial\xi}=0,\ P(R)=R-b^2\widetilde{U}+\text{const}>0. \qquad (10)$$

Система квазилинейных уравнений (10) содержит две искомые функции $R(\xi,y)$, $V(\xi,y)$ и является математическим аналогом уравнений одномерной газодинамики, записанных в лагранжевых координатах. В терминах газодинамики получаем: y – время; ξ – лагранжева координата; R – удельный объем; P – давление; V – скорость. Аналогом эйлеровых координат служат переменные y,η, где $d\eta=Vdy+Rd\xi$. Зависимость $P=P(R)$ – политропная функция состояния изучаемой системы «среда – сток энергии». «Сжимаемость» определяется производной

$$\frac{dP}{dR}=1-b^2\frac{d\widetilde{U}}{dR}=1-\frac{N^2}{w^2}=1-M^2,$$

где $N=dx/dt$ – скорость распространения ξ – линии; $w=(\lambda/c\gamma)^{1/2}$ – скорость распространения тепловых возмущений; M – тепловое число Маха. Если $dP/dR<0,$ то тепловой процесс соответствует движению классического газа, для которого увеличение давления приводит к уменьшению объема. В этом случае тепловой процесс «сверхзвуковой», $M^2>1$; система (10) имеет гиперболический тип. Если $dP/dR>0,$ то имеем квазичаплыгинскую среду, обладающую аномальной сжимаемостью; тепловой процесс – «дозвуковой», $M^2<1$; система (10) имеет эллиптический тип. Такие среды являются неустойчивыми, им присущи стоячие нарастающие во времени возмущения. Математические вопросы описания квазичаплыгинских сред даны в [3].

Тепловой маятник

Систему (1) нетрудно преобразовать к одному нелинейному уравнению для температуры:

$$c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\gamma\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\gamma\frac{\partial q_\upsilon}{\partial t}+q_\upsilon. \tag{11}$$

Здесь $c,\gamma-\mathrm{const}.$ Далее считаем, что $q_\upsilon=q_\upsilon^0+k_\upsilon T;$ $q_\upsilon^0,$ $k_\upsilon-\mathrm{const}.$ Для коэффициента теплопроводности рассмотрим монотонный и немонотонный варианты зависимости $\lambda(T).$

Монотонный вариант: $\lambda=\lambda_0+\lambda_1 T;$ $\lambda_0,\lambda_1-\mathrm{const}.$ Нетрудно видеть, что существует точное локальное по координатам полиномиальное решение:

$$T(x,y,t)=T_0(t)+xa_1(t)+x^2a_2(t)+yb_1(t)+y^2b_2(t).$$

Система определяющих уравнений для коэффициентов $a_2(t),$ $b_2(t)$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}c(\dot a_2+\gamma\ddot a_2)&=6\lambda_1a_2^2+2\lambda_1a_2b_2+k_\upsilon(a_2+\gamma\dot a_2),\\ c(\dot b_2+\gamma\ddot b_2)&=6\lambda_1b_2^2+2\lambda_1a_2b_2+k_\upsilon(b_2+\gamma\dot b_2).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Точка над символом функции означает обыкновенное дифференцирование. Эта динамическая система описывает колебание теплового маятника с двумя степенями свободы.

Немонотонный вариант: $\lambda=\lambda_0+\lambda_1T+\lambda_2T^2,$ $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2-\mathrm{const}.$ Уравнению (11) удовлетворяет локальное по координатам точное решение:

$$T(x,y,t)=T_0(t)+xa_1(t)+yb_1(t).$$

Уравнения теплового маятника имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}c(\dot a_1+\gamma\ddot a_1)&=2\lambda_2a_1^3+2\lambda_2a_1b_1^2+k_\upsilon(a_1+\gamma\dot a_1),\\ c(\dot b_1+\gamma\ddot b_1)&=2\lambda_2a_1^2b_1+2\lambda_2b_1^3+k_\upsilon(b_1+\gamma\dot b_1).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Автономные динамические системы (12) и (13) дают возможность изучать двумерные колебательно-релаксационные процессы в нелинейных средах. Вывод уравнений трехмерного теплового маятника затруднений не представляет.

Изложенный подход естественным образом распространяется на двухфазную систему, поведение которой определяется двумя уравнениями вида (11) для неизвестных температур T_1, T_2. Источники энергии для первой и второй фаз, соответственно, равны $q_{\upsilon}^{(i)} = q_{\upsilon i}^{(0)} + k_{\upsilon}^{(i)} T_1 + l_{\upsilon}^{(i)} T_2;\ i = 1, 2.$

Заключение

В классе двойных волн получено новое точное решение, содержащее две произвольные функции одного аргумента. Установлено, что в локально-неравновесной системе «среда – сток энергии» могут возникать неустойчивые процессы, имеющие своим математическим аналогом квазичаплыгинские уравнения газодинамики для среды с аномальной сжимаемостью. Дан вывод уравнений теплового маятника с двумя и тремя степенями свободы.

Литература

1. Шабловский, О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – 382 с.
2. Рыжов, О. С. Некоторые вырожденные околозвуковые течения / О. С. Рыжов // Приклад. математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 2. – С. 260–264.
3. Жданов, С. К. Квазигазовые неустойчивые среды / С. К. Жданов, Б. А. Трубников. – М. : Наука, 1991. – 176 с.

– *Получено 06.10.2010 г.*