

УДК 62-83-52

## ОСОБЕННОСТИ ИММИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ КОММУТАЦИИ И ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СХЕМАХ ВКЛЮЧЕНИЯ

**В. С. ЗАХАРЕНКО, И. В. ДОРОЩЕНКО**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### Введение

Известная модель асинхронного электродвигателя [1] справедлива для схемы включения статорных обмоток «звезда с нейтралью» и для случая, когда статорные обмотки не имеют общей точки (например, при питании от НПЧ). Для исследования динамики при питании статора двигателя от автономного инвертора и при несимметричных схемах включения необходимо работать с линейными напряжениями. Кроме того, уравнения должны быть разрешены относительно производных токов для обеспечения удобства учета коммутации силовых полупроводниковых приборов.

### Вывод модели

Вычтем попарно друг из друга уравнения электрического равновесия статора для получения линейных напряжений. Уравнения для ротора оставим без изменений:

$$\frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} = u_{AB} - R_1 \cdot i_A + R_1 \cdot i_B;$$

$$\frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} = u_{BC} - R_1 \cdot i_B + R_1 \cdot i_C;$$

$$\frac{d\psi_C}{dt} - \frac{d\psi_A}{dt} = u_{CA} - R_1 \cdot i_C + R_1 \cdot i_A;$$

$$\frac{d\psi_a}{dt} = u_a - R_2 \cdot i_a;$$

$$\frac{d\psi_b}{dt} = u_b - R_2 \cdot i_b;$$

$$\frac{d\psi_c}{dt} = u_c - R_2 \cdot i_c;$$

$$m = -L_{12} \cdot p_d \cdot \left\{ \begin{array}{l} i_A \left[ \sin(\varphi_{эл}) i_a + \sin\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_b + \sin\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_c \right] + \\ + i_B \left[ \sin\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_a + \sin(\varphi_{эл}) i_b + \sin\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_c \right] + \\ + i_C \left[ \sin\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_a + \sin\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_b + \sin(\varphi_{эл}) i_c \right] \end{array} \right\};$$

$$\frac{d\omega_{эл}}{dt} = \frac{p_d}{J} (m - m_C);$$

$$\frac{d\varphi_{эл}}{dt} = \omega_{эл},$$

где  $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C, R_1, i_A, i_B, i_C, u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}$  – соответственно потокосцепления, активное сопротивление, токи и линейные напряжения статора;  $\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c, R_2, i_a, i_b, i_c, u_a, u_b, u_c$  – соответственно приведенные к статору потокосцепления, активное сопротивление, токи и напряжения ротора;  $\varphi_{эл}$  – угол поворота ротора в электрических радианах;  $\omega_{эл}$  – скорость вращения ротора в электрических рад/с;  $m$  – электромагнитный момент машины;  $p_d$  – число пар полюсов двигателя;  $J$  – момент инерции электродвигателя и механической части;  $m_C$  – момент сопротивления.

Потокосцепления выражаются:

$$\begin{aligned} \Psi_A &= L_1 \cdot i_A - \frac{L_{12}}{2} i_B - \frac{L_{12}}{2} i_C + \\ &+ L_{12} \cdot \cos(\varphi_{эл}) i_a + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_b + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_c; \\ \Psi_B &= -\frac{L_{12}}{2} i_A + L_1 \cdot i_B - \frac{L_{12}}{2} i_C + \\ &+ L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_a + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{эл}) i_b + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_c; \\ \Psi_C &= -\frac{L_{12}}{2} i_A - \frac{L_{12}}{2} i_B + L_1 \cdot i_C + \\ &+ L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_a + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_b + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{эл}) i_c; \\ \Psi_a &= L_{12} \cdot \cos(\varphi_{эл}) i_A + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_B + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{эл} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_C + \\ &+ L_2 \cdot i_a - \frac{L_{12}}{2} i_b - \frac{L_{12}}{2} i_c; \end{aligned}$$

$$\Psi_b = L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_A + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) i_B + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_C - \\ - \frac{L_{12}}{2} i_a + L_2 \cdot i_b - \frac{L_{12}}{2} i_c;$$

$$\Psi_c = L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_A + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) i_B + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) i_C - \\ - \frac{L_{12}}{2} i_a - \frac{L_{12}}{2} i_b + L_2 \cdot i_c,$$

где  $L_{12}$  – взаимная индуктивность между обмотками фаз статора и ротора;  $L_1$  – собственная индуктивность обмотки фазы статора;  $L_2$  – приведенная к статору собственная индуктивность обмотки фазы ротора.

После дифференцирования выражений для потокосцеплений фаз  $A$  статора и  $a$  ротора получим:

$$\frac{d\Psi_A}{dt} = L_1 \frac{di_A}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_B}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_C}{dt} + \\ + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) \frac{di_a}{dt} - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}) \omega_{\text{эл}} \cdot i_a + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_b}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_b + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_c}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_c;$$

$$\frac{d\Psi_a}{dt} = L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) \frac{di_A}{dt} - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}) \omega_{\text{эл}} \cdot i_A + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_B}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_B + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_C}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_C + \\ + L_2 \cdot \frac{di_a}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_b}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_c}{dt}.$$

Для остальных фаз аналогичные действия.

Подставим производные потокосцеплений в уравнения электрического равновесия. Для фазы  $A$  статора:

$$L_1 \frac{di_A}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_B}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_C}{dt} + \\ + L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) \frac{di_a}{dt} - L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}) \omega_{\text{эл}} \cdot i_a + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_b}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_b + \\ + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_c}{dt} - L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_c +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{L_{12}}{2} \frac{di_A}{dt} - L_1 \cdot \frac{di_B}{dt} + \frac{L_{12}}{2} \frac{di_C}{dt} - \\
& - L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_a}{dt} + L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_a - \\
& - L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) \frac{di_b}{dt} + L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}) \omega_{\text{эл}} \cdot i_b - \\
& - L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_c}{dt} + L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_c = u_{AB} - R_1 \cdot i_A + R_1 \cdot i_B; \\
& \left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) \frac{di_A}{dt} - \left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) \frac{di_B}{dt} + \\
& + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6}\right) \frac{di_a}{dt} + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_b}{dt} + \\
& + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_c}{dt} = \\
& = u_{AB} - R_1 \cdot i_A + R_1 \cdot i_B + \\
& + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_a + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_b + \\
& + L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_c.
\end{aligned}$$

Для остальных статорных уравнений – аналогично.

Для уравнения фазы *a* ротора после преобразований получим:

$$\begin{aligned}
& L_{12} \cdot \cos(\varphi_{\text{эл}}) \frac{di_A}{dt} + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_B}{dt} + L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \frac{di_C}{dt} + \\
& + L_2 \frac{di_a}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_b}{dt} - \frac{L_{12}}{2} \frac{di_c}{dt} = u_a - R_2 \cdot i_a + \\
& + L_{12} \cdot \sin(\varphi_{\text{эл}}) \omega_{\text{эл}} \cdot i_A + L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_B + L_{12} \cdot \sin\left(\varphi_{\text{эл}} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \omega_{\text{эл}} \cdot i_C.
\end{aligned}$$

По аналогии выражаем оставшиеся роторные уравнения.

В результате получим в матричной форме:

$$\frac{dI}{dt} = A^{-1} \cdot B; \quad B = U + C \cdot I; \quad m = -L_{12} \cdot p_{\text{д}} \cdot I_1 \cdot (D \cdot I_2),$$

где матрицы коэффициентов определяются следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} \left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & -\left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & 0 & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ 0 & \left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & -\left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ -\left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & 0 & \left(L_1 + \frac{L_{12}}{2}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \times \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) \\ L_{12} \cdot \cos(\varphi_{ЭЛ}) & L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_2 & -\frac{L_{12}}{2} & -\frac{L_{12}}{2} \\ L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \cos(\varphi_{ЭЛ}) & L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & -\frac{L_{12}}{2} & L_2 & -\frac{L_{12}}{2} \\ L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \cos\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \cos(\varphi_{ЭЛ}) & -\frac{L_{12}}{2} & -\frac{L_{12}}{2} & L_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 & 0 & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ 0 & -R_1 & R_1 & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ R_1 & 0 & -R_1 & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{\pi}{6}\right) \\ L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin(\varphi_{ЭЛ}) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & -R_2 & 0 & 0 \\ L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin(\varphi_{ЭЛ}) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & 0 & -R_2 & 0 \\ L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & L_{12} \cdot \omega_{ЭЛ} \times \sin(\varphi_{ЭЛ}) & 0 & 0 & -R_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_{ЭЛ}) & \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & \sin(\varphi_{ЭЛ}) & \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\ \sin\left(\varphi_{ЭЛ} - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & \sin\left(\varphi_{ЭЛ} + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) & \sin(\varphi_{ЭЛ}) \end{bmatrix}$$

### Апробация модели

Полученная модель асинхронного электродвигателя была использована в модели асинхронного электропривода с прямым управлением моментом (*DTC*). Модель двигателя представлена на рис. 1. На рис. 2 представлены диаграммы изменения электромагнитного момента и угловой скорости вращения в течение переходных процессов «в малом» и «в большом» по управлению и возмущению моменту сопротивления. Следует отметить, что была учтена дискретизация системы по времени.

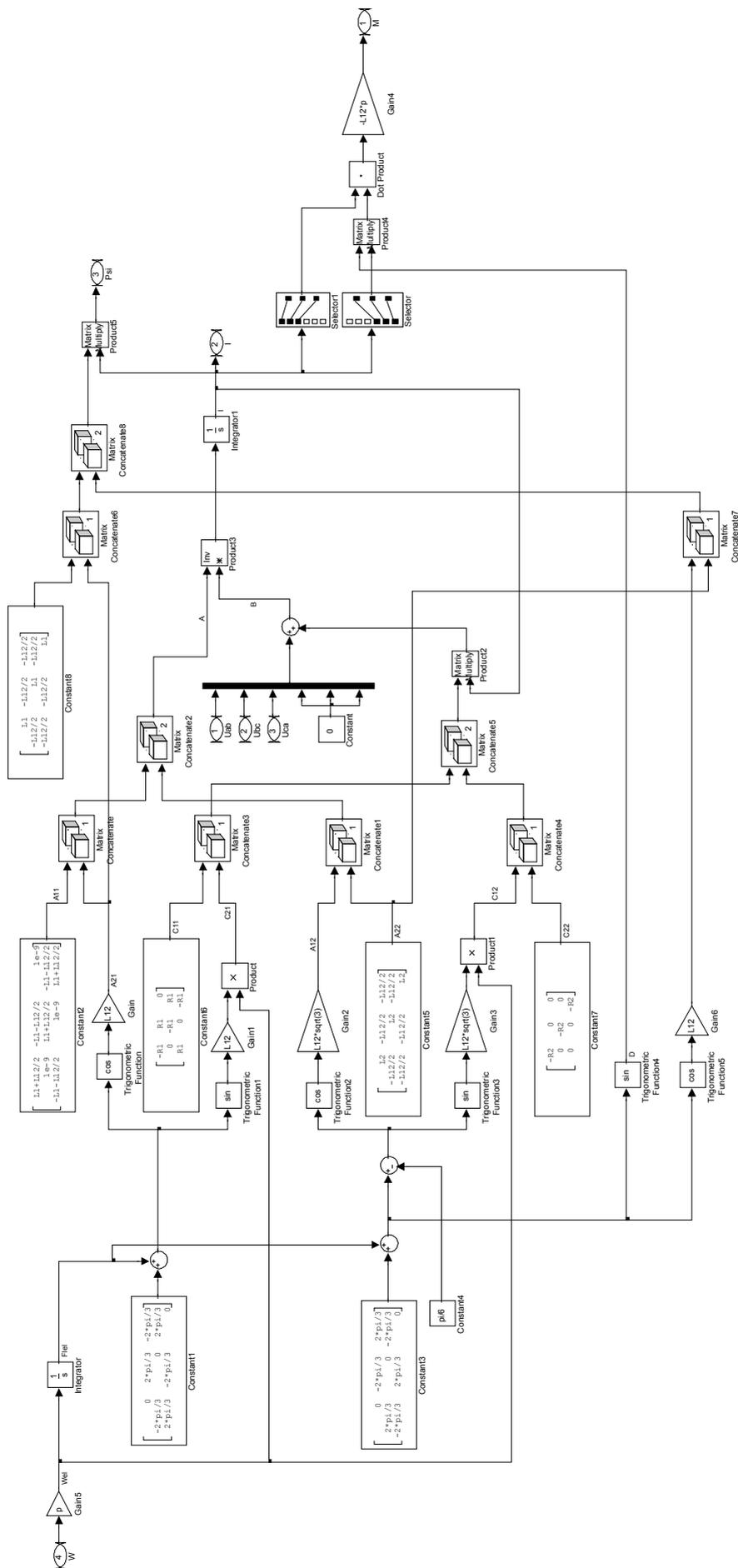


Рис. 1. Модель асинхронного электродвигателя в среде Matlab Simulink

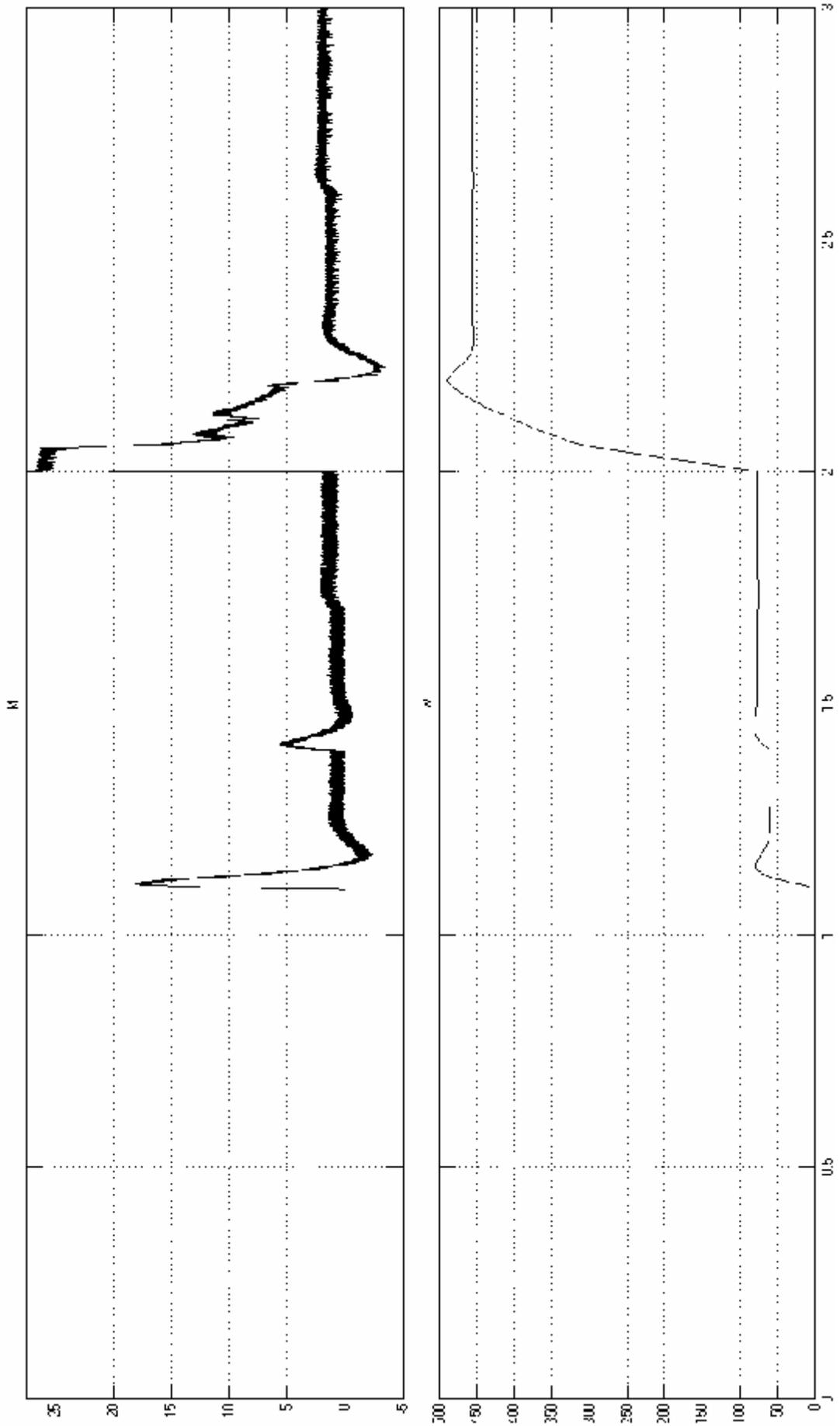


Рис. 2. Диаграммы момента и скорости

### **Заключение**

В процессе апробации модели двигателя были выявлены следующие особенности:

1. Шаг расчета для получения адекватного результата должен иметь порядок единиц микросекунд. Очевидно, данная особенность обусловлена тем, что при дифференцировании выражений потокосцеплений во избежание чрезмерного усложнения модели не учитывалось, что скорость вращения является функцией времени. И для получения адекватного результата частота, соответствующая шагу расчета, должна быть достаточно велика по сравнению с частотой вращения двигателя.

2. В верхней левой четверти матрицы  $A$  при расчетах необходимо вместо нулей ставить достаточно малое конечное значение. Это связано с попарным вычитанием уравнений статора для получения в уравнениях линейных напряжений, что привело к вырождению матрицы  $A$ .

### **Литература**

1. Фираго, Б. И. Теория электропривода : учеб. пособие для вузов / Б. И. Фираго, Л. Б. Палявчик. – Минск : Техноперспектива, 2007. – 585 с.

*Получено 29.03.2011 г.*