

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИСТОЧНИК ЭНЕРГИИ И ГЕНЕРАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В МАТЕРИАЛЕ С «ТЕПЛОВОЙ ПАМЯТЬЮ»

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Введение

Теплофизическая модель «среда – объемный источник энергии» имеет широкое распространение в теории горения, в газовой динамике, в физике твердого тела и др. В данной работе рассматривается воздействие объемного источника энергии на неподвижную сплошную среду, обладающую «тепловой памятью». Прикладные аспекты проведенного исследования связаны с проблемой возникновения нелинейных колебаний и периодических структур при взрывной кристаллизации аморфных пленок, напыленных на подложку [1]–[3].

Локально-неравновесная модель переноса тепла состоит из уравнения для теплового потока [4] и уравнения баланса энергии:

$$q + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_v, \quad (1)$$

где T – температура; q – удельный тепловой поток; c – объемная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; γ – время релаксации теплового потока; t – время, x – декартова координата, $q_v(T, t)$ – мощность внутренних источников энергии. Явная зависимость функции источника от времени характерна для реономных (параметрических) теплофизических систем. Современное состояние теории локально-неравновесного теплопереноса в нелинейных средах и подробная библиография этой проблемы даны в [5].

Волновое уравнение теплопереноса с объемным источником энергии хорошо известно в математической физике. Оно описывает процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным ($\gamma \partial/\partial t \gg 1$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = k_v(T, t), \quad \alpha = x/w, \quad w^2 = \lambda/(c\gamma) \equiv \text{const}, \quad k_v = q_v/(c\gamma), \quad (2)$$

где w – скорость распространения тепловых возмущений. Среди уравнений вида (2) важное место занимает уравнение синус-Гордона с постоянными коэффициентами, которое детально изучено в теории нелинейных эволюционных уравнений. Здесь мы рассматриваем уравнение синус-Гордона в условиях воздействия на систему внешнего нестационарного периодического во времени источника энергии. Все расчеты выполнены в безразмерных переменных. При обезразмеривании применяем масштабы величин, для которых размерные и безразмерные уравнения имеют одинаковую форму записи.

Цель работы: 1) изучить генерацию периодических локально-неравновесных тепловых полей объемным источником энергии; 2) выяснить характер воздействия возбуждающих колебаний внешнего источника на систему, поведение которой описывается реономным уравнением синус-Гордона.

Бегущие тепловые волны и динамический гистерезис на плоскости (T, q_v)

Рассмотрим эволюционные процессы в классе решений «бегущая волна», когда $T = T(z)$, $q = q(z)$, $z = x + bt$, $b \equiv \text{const}$. На основе системы уравнений (1) решаем обратную задачу, а именно: постулируем физически содержательную зависимость $T(z)$ либо $q(z)$ и вычисляем $q_v(z)$. Это дает возможность определить температурную зависимость источника энергии $q_v(T)$ и замкнуть задачу. Параметры среды: $\lambda, c, \gamma - \text{const}$. Характерные масштабы теплофизических параметров взяты такими, что в безразмерных переменных имеем $\lambda = 1$, $c = 1$, $\gamma = 1$. Тогда $w^2 = \lambda / (c\gamma) = 1$. Параметр b представляет скорость бегущей волны, распространяющейся влево ($b > 0$) либо вправо ($b < 0$). Таким образом, имеем «дозвуковой» процесс, если $|b| < 1$; процесс «сверхзвуковой», если $|b| > 1$. Функция $q_v(T)$ строится на основе ее параметрического представления $T(z)$, $q_v(z)$. В тех случаях, когда расчеты дают неоднозначную функцию $q_v(T)$, т. е. каждой температуре T соответствует не менее двух значений q_v , применяется термин «динамический гистерезис».

Пример 1. $T = T_0 + A_1 \sin(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin(\alpha_2 z + \beta_2)$, $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const}$.

Три дозвуковых варианта даны на рис. 1, а–в; три сверхзвуковых варианта – на рис. 1, г–е. На плоскости (T, q_v) наблюдаем гистерезисные кривые, причем имеются случаи самопересечения гистерезисной кривой. Отметим существование температурных интервалов, где гистерезис выражен очень слабо и зависимость $q_v(T)$ можно считать однозначной.

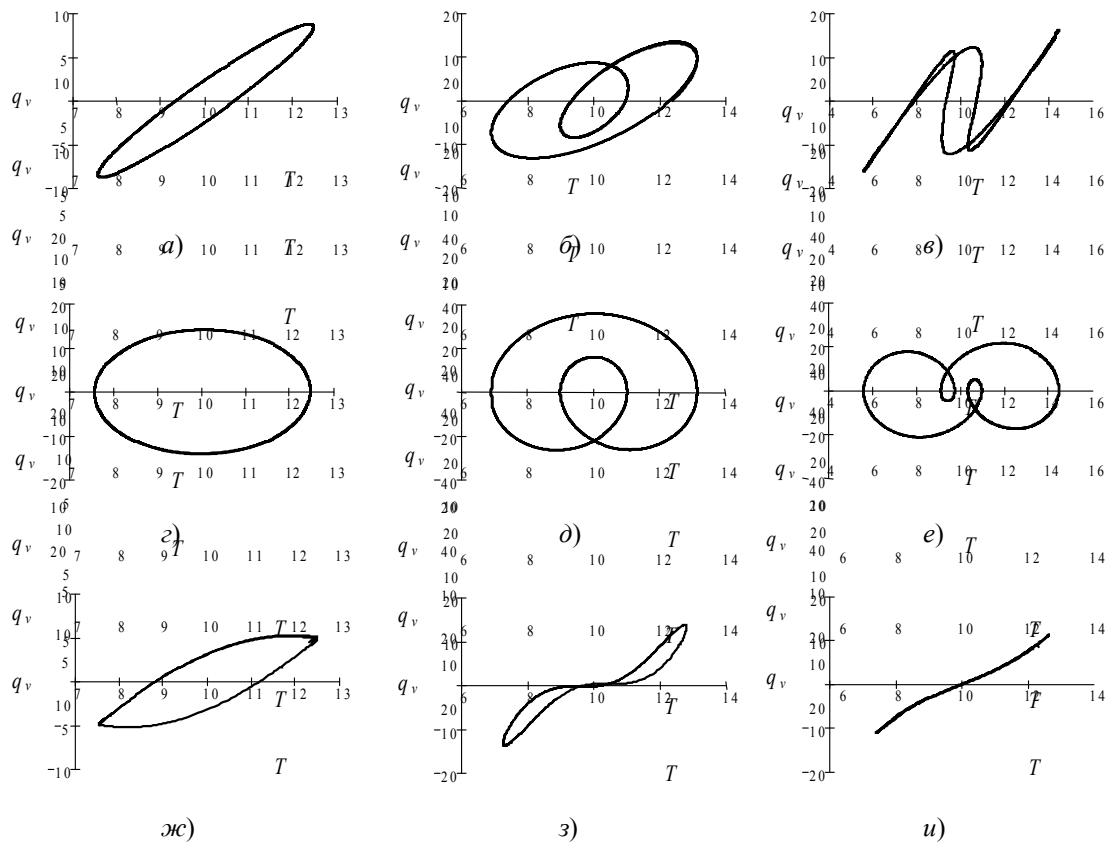


Рис. 1. Гистерезисные свойства объемного источника энергии $q_v(T)$

Пример 2. $T = T_0 + A_1 \sin^3(\alpha_1 z + \beta_1) + A_2 \sin^3(\alpha_2 z + \beta_2)$, $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 - \text{const}$.

Дозвуковые варианты показаны на рис. 1, ж–и. Сравнение с примером 1 говорит о значительном влиянии характера аналитической зависимости $T(z)$ на конфигурацию

петель динамического гистерезиса на плоскости (T, q_v) . Обращает на себя внимание рис. 1, и, где гистерезис практически отсутствует и функция источника $q_v(T)$ – монотонная и знакопеременная. В сверхзвуковых вариантах форма петель слабо реагирует на изменение поведения зависимостей $T(z)$ и $q(z)$.

Представленные примеры демонстрируют существование нетривиальных ситуаций при взаимодействии источника энергии со средой, а именно: монотонный источник (сток) $q_v(T)$ при определенных обстоятельствах инициирует формирование периодических по $z = x + bt$ тепловых полей. Теоретические аспекты этого явления и их приложения к задачам взрывной кристаллизации были обсуждены в работе [2]. Чтобы подчеркнуть принципиальную роль неравновесности, укажем на результаты работы [6], в которой была рассмотрена нелинейная среда с нулевым временем релаксации (закон теплопереноса Фурье): $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T$; $c \equiv \text{const}$; $\gamma \equiv 0$, $q = -\lambda \partial T / \partial x$. Ни в одном из процессов, рассчитанных в [6] на основе нелинейного параболического уравнения теплопроводности, не обнаружены ситуации, при которых петли гистерезиса на плоскости (T, q_v) вырождались бы в однозначные линии $q_v(T)$. Таким образом, объемный источник энергии $q_v = q_v(T)$, возбуждающий одномерные автомодельные периодические по $z = x + bt$ тепловые поля, обладает следующими свойствами. В локально-неравновесной среде ($\gamma > 0$) наблюдаются существенные различия между дозвуковыми и сверхзвуковыми тепловыми процессами. Генерация периодических полей может происходить под действием положительного, отрицательного или знакопеременного источника, не обладающего гистерезисной зависимостью $q_v(T)$: в этом случае на плоскости (T, q_v) имеем монотонную либо немонотонную однозначную по отношению к аргументу T линию.

Реономное уравнение синус-Гордона

Если $k_v(T) = \pm \sin T$, то (2) является уравнением синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = \pm \sin T. \quad (3)$$

Результаты исследования одного реономного варианта уравнения синус-Гордона в поле внешней периодической силы с затуханием представлены в [7]. Здесь мы рассматриваем два простых и наглядных примера реономных зависимостей $k_v(T, t)$, которые удастся преобразовать к известным решениям [8] уравнения синус-Гордона. Сначала обсудим теплофизическую интерпретацию источника энергии в уравнении (3). Ясно, что $k_v(T) \equiv \pm \sin T = 0$ при $T_1 = 0$; $T_2 = \pi$, $T_3 = 0$. Пусть $k_v = \sin T$. Тогда по отношению к аргументу t состояние $\{T_2^- = \pi, T_t = 0\}$ является устойчивым, а оба состояния $\{T_1^+ = 0, T_t = 0\}$ и $\{T_3^+ = 2\pi, T_t = 0\}$ – неустойчивые при эволюции во времени. По отношению к координате α состояние $\{T_2^- = \pi, T_\alpha = 0\}$ неустойчивое, и система имеет два устойчивых положения теплового равновесия: $\{T_1^+ = 0, T_\alpha = 0\}$, $\{T_3^+ = 2\pi, T_\alpha = 0\}$. Здесь и далее верхние индексы \pm указывают знак производной $\partial k_v / \partial T$ при соответствующей температуре. Приняты обозначения: $T_t = \partial T / \partial t$, $T_\alpha = \partial T / \partial \alpha$. Пусть $k_v = -\sin T$. Тогда имеем одно устойчивое состояние $\{T_2^+ = \pi, T_\alpha = 0\}$ по отношению к координате α . Вместе с тем два состояния $\{T_1^- = 0, T_\alpha = 0\}$ и $\{T_3^- = 2\pi, T_\alpha = 0\}$ – устойчивые при эволюции во времени.

Представленные далее два примера реономных систем имеют следующие отличительные признаки: 1) источник $k_v(T, t)$ содержит аддитивным образом гармоническую по t функцию (аналог внешней периодической силы); 2) значения температур, при которых объемный источник энергии обращается в ноль,

$[T = T_i, k_v(T_i, t) = 0, i = 1, 2, 3]$, являются нестационарными. Для этих температур по-прежнему важен знак производной $\partial k_v(T, t) / \partial T$, но вопрос об устойчивости/неустойчивости таких нестационарных состояний остается открытым. Изучаем здесь динамические гистерезисные свойства реономной системы.

Вариант I. Возбуждение колебаний и ширина гистерезисного интервала

Поведение реономной системы описывается формулами:

$$T - T_0 \equiv \tau(\alpha, t) = \theta(\alpha, t) - f(t), \quad f(t) = f_1 \sin(k_1 t), \quad T_0, f_1, k_1 - \text{const},$$

$$k_v(T, t) = \sin[\tau + f(t)] + k_1^2 f(t), \quad (4)$$

где $T_0 > 0$; k_1 – частота возбуждающих колебаний; функция $\theta(\alpha, t)$ определяется известным решением [8]:

$$\theta = -4 \arctan \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\sin(\alpha \sqrt{1-m^2} + C_2)}{\text{ch}(mt + C_1)} \right], \quad m, C_1, C_2 - \text{const}, \quad 0 < m < 1, \quad t \geq 0.$$

Для дальнейшего важно, что здесь $\theta(\alpha, t)$ – непериодическая функция аргумента t . Если $C_1 > 0$, то $\text{ch}(mt + C_1)$ – монотонно возрастающая функция; если $C_1 < 0$, то $\text{ch}(mt + C_1)$ немонотонная функция, она имеет минимум при $mt_1 + C_1 = 0$; при $t > t_1 > 0$ эта функция монотонно растет. Имеем $k_v(T, t) = 0$, если $\sin \theta = -k_1^2 f(t)$, $\tau = -f + \pi n_0 + (-1)^{n_0} \arcsin(-k_1^2 f)$. Выбор целого числа $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ влияет на интервал температур, в котором изучается решение. В расчетах в качестве τ_1^- и τ_3^- берем два соседних корня, примыкающих слева и справа к τ_2^+ , где τ_2^+ – самый близкий к нулю корень уравнения $k_v(\tau_2^+, t) = 0$, для которого $\partial k_v(\tau, t) / \partial \tau > 0$, причем $\tau_1^- < \tau_2^+ < \tau_3^-$. Вычислительная процедура состоит в следующем. Работаем на интервале времени, равном одному периоду колебаний функции $f(t)$: $t \in [0, 2\pi/k_1]$. Для каждого фиксированного t строим изотермы τ_1^- и τ_3^- : $\tau_1^- = \theta_1 - f$; $\tau_3^- = \theta_3 - f$; $S_1(\alpha, t) = \tan(-\theta_1/4)$, $S_3(\alpha, t) = \tan(-\theta_3/4)$. Из двух последних формул находим значения α_1, α_3 , которым в изучаемый момент времени t соответствуют температуры τ_1^-, τ_3^- . Совокупность точек $(t, x_1(t))$ и $(t, x_3(t))$ дает возможность построить вдоль каждой изотермы зависимости $N^2(t), g^2(t)$, а затем найти связь $N^2 = N^2(g^2)$, где $N = (-\partial T / \partial t) / (\partial T / \partial x)$ – скорость перемещения изотермы; $g = \partial T / \partial x$ – градиент температуры; $S = \tan(-\theta/4)$. В основной серии расчетов были зафиксированы величины $m = 0,999$; $C_2 = 2$; варьируемые параметры: частота k_1 и константа C_1 . Величина C_1 влияет на амплитуду колебаний по α функции $S(\alpha, t = 0)$, характеризующей температурную неоднородность среды в начальный момент времени. В тех случаях когда на плоскости (g^2, N^2) динамический гистерезис отсутствует, функция $N^2 = N^2(g^2)$ – монотонно убывающая; график этой зависимости похож на обычную гиперболу. Наличие гистерезиса, наблюдаемого при сравнении двух нестационарных состояний τ_1^- и τ_3^- , для которых $\partial k_v(T_\alpha, t) / \partial T < 0$, связано в первую очередь с алгебраической величиной константы C_1 . В таблице представлены левая и правая границы интервала $C_1 \in [C_1^{(1)}, C_1^{(2)}]$, в котором динамический гистерезис на плоскости (g^2, N^2) существует. В этих случаях петли гистерезиса – незамкнутые линии, для которых отдельным значениям g^2 могут соответствовать два или три значения N^2 . Из числовых данных в таблице следует, что рост частоты возбуждающих колебаний в значительной степени увеличивает ширину гистерезисного интервала $\Delta C_1 = C_1^{(2)} - C_1^{(1)}$. Например (см. первую и последнюю строки в

таблице), при увеличении k_1 в 3,89 раза ΔC_1 увеличивается в 12,75 раз. Для обработки данных в таблице (всего было получено 16 строк) применяем относительные величины $\Delta k_1 = (k_1)_l / (k_1)_1$, $\delta(\Delta C_1) = (\Delta C_1)_l / (\Delta C_1)_1$, где $l=1, 2, \dots, 16$ – номер строки. Первая и последняя строки в приведенной здесь таблице соответствуют номерам $l=1$ и $l=16$. В результате получили аппроксимирующий полином $\delta(\Delta C_1) = -21,63 + 32,58\Delta k_1 - 11,015\Delta k_1^2 + 1,264\Delta k_1^3$. Таким образом, реономный источник энергии (4) обладает принципиальными отличиями от своего стационарного аналога (3), а именно: на изотермах $\tau_1^-, \tau_3^-, \partial k_v / \partial \tau < 0$, наблюдается динамический гистерезис, который обладает сильной чувствительностью к частоте возбуждающих колебаний.

Влияние частоты возбуждающих колебаний на ширину гистерезисного интервала

k_1	Δk_1	$C_1^{(1)}$	$C_1^{(2)}$	ΔC_1
1,8	1,000	-3,7	-3,3	0,4
3,0	1,667	-3,7	-0,5	3,2
3,8	2,111	-3,6	0,4	4,0
7,0	3,889	-3,5	1,6	5,1

Вариант II. Резонансные свойства реономной системы

Поведение реономной системы описывается формулами:

$$T - T_0 \equiv \tau(\alpha, t) = \theta(\alpha, t) - f(t), \quad f(t) = f_1 \sin(k_1 t), \quad T_0, f_1, k_1 - \text{const}, \quad (5)$$

$$k_v(T, t) = -\sin[\tau + f(t)] + k_1^2 f(t). \quad (6)$$

Смысл обозначений такой же, как для варианта I. Функция $\theta(\alpha, t)$ определяется известным решением [8]:

$$\theta = -4 \arctan \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\sin(t\sqrt{1-m^2} + C_2)}{\text{ch}(m\alpha + C_1)} \right], \quad m, C_1, C_2 - \text{const}, \quad 0 < m^2 < 1, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Отличия от варианта I следующие: 1) изменился знак перед $\sin \theta$ [сравни (4) и (6)]; 2) функция $\theta(\alpha, t)$ в (7) теперь является периодической по времени. Таким образом, формула (5) для температуры содержит своеобразную комбинацию колебаний с двумя частотами k_1 и $\sqrt{1-m^2}$. Здесь k_1 – частота возбуждающих колебаний, $\sqrt{1-m^2}$ – «собственная» частота. Результат взаимодействия этих двух колебательных процессов становится ясен при рассмотрении динамического гистерезиса в точке с фиксированной координатой $\alpha = \alpha_r$. Для построения петли динамического гистерезиса на плоскости (T_r, Q) применяем функции $T_r(t) = T(\alpha_r, t)$, $Q(t) = k_v(T_r(t), t), t \geq 0$ и получаем графики зависимостей $Q = Q(T_r, \alpha_r)$, где α_r – параметр. Сразу отметим, что все приведенные ниже результаты расчетов обладают хорошо выраженной периодичностью по координате α_r . Это объясняется структурой формул (5)–(7). В «резонансном» случае имеем $k_1 = \sqrt{1-m^2}$. В рамках этой связи получены следующие результаты. Если k_1 находится в левой окрестности 1 (например, $k_1 = 0,99$; $C_1 = -5$; $C_2 = 2$), то гистерезис отсутствует: линия $Q = Q(T_r, \alpha_r)$ – прямая, и для нее $\partial Q / \partial T_r < 0$, а функция $Q(T_r, \alpha_r)$ – знакопеременная. Если k_1 принадлежит правой конечной окрестности нуля (например, $k_1 = 0,4$; $C_1 = -5$; $C_2 = 0$), то гистерезис тоже отсутствует, но зависимость $Q(T_r, \alpha_r)$ периодически (по отношению к α_r) становится немонотонной по синусоидальному типу (рис. 2, а–в). Типичный для резонансной ситуации процесс, обладающий гистерезисной

нелинейностью, показан на рис. 2, *з-е*; здесь петля гистерезиса раздваивается на линии синусоидального типа. Если же рассматривать колебания в субрезонансном ($k_1/\sqrt{1-m^2} < 1$) либо в сверхрезонансном ($k_1/\sqrt{1-m^2} > 1$) интервалах частот, то гистерезисная зависимость локализована в конечной области (рис. 2, *ж-и*), которая сплошным образом заполнена линией $Q(T_r, \alpha_r)$. Таким образом, для системы, поведение которой описывается реономным уравнением синус-Гордона с периодическим по времени внешним источником (6), принципиальное значение имеет факт существования связи $k_1^2 + m^2 = 1$ резонансного типа. Если $k_1^2 + m^2 \neq 1$, то участки линии, образующей петлю динамического гистерезиса на плоскости (T_r, Q) , сгущаются с течением времени и образуют пятно.

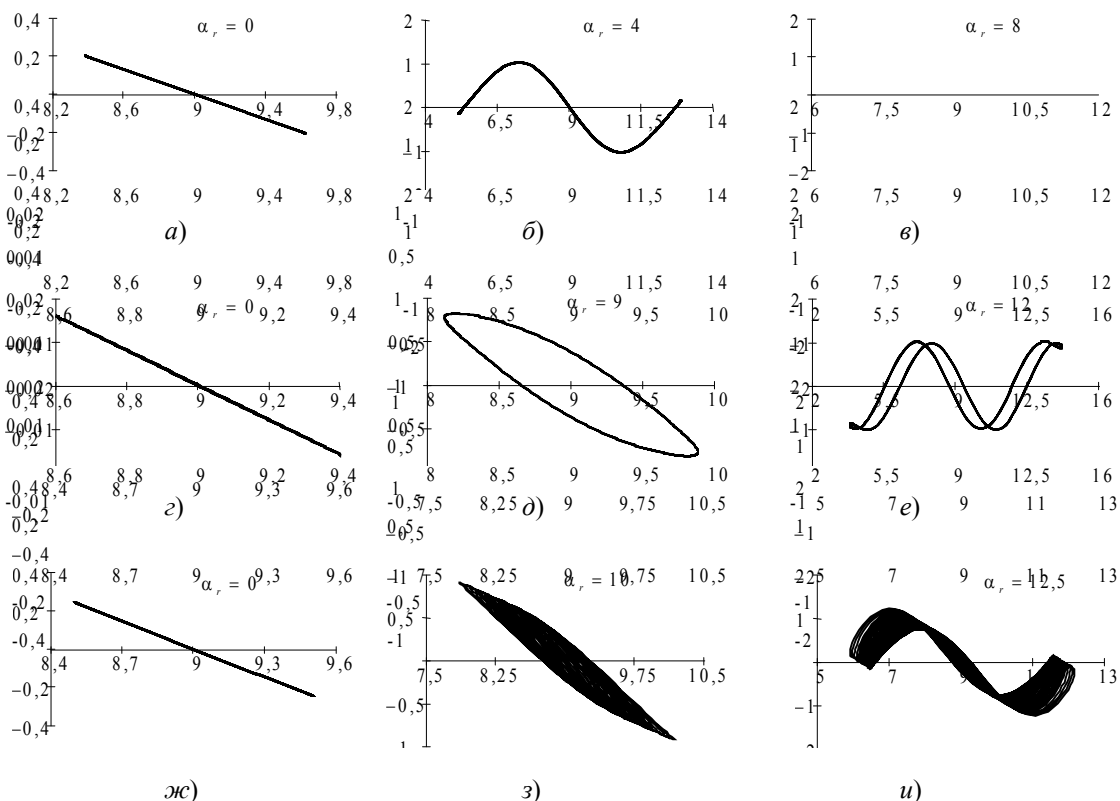


Рис. 2. Резонансные свойства динамического гистерезиса на плоскости (T_r, Q)

Заключение

Установлено, что в классе периодических решений «бегущая волна» существуют тепловые поля, для которых корреляция «объемный поток – температура» не является необходимым образом многозначной. Следовательно, для таких тепловых режимов колебания по аргументу $z = x + bt$ обусловлены монотонным знакопеременным источником $q_v(T)$, который моделирует конкуренцию между тепловыделением и теплоотводом в системе «среда – источник энергии».

Обнаружены принципиальные отличия реономного источника типа синус-Гордона от его стационарного (классического) аналога. Эти различия наблюдаются при возбуждении колебаний внешним периодическим по времени тепловым полем. Представлены результаты численных расчетов резонансных и гистерезисных параметров системы.

Литература

1. Grigoropoulos, C. Explosive crystallization in the presence of melting / C. Grigoropoulos [et al.] // Physical Review B. – 2006. – Vol. 73. – P. 184125-1–184125-15.

2. Shablovsky, O. N. A Thermal Model of Periodic Crystallization / O. N. Shablovsky // Crystallography Reports. – 2005. – Vol. 50, № 1. – P. 62–67.
3. Шабловский, О. Н. Феноменологическая оценка времени тепловой релаксации при взрывной кристаллизации аморфных пленок германия / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Тепловые процессы в технике. – 2010. – № 5. – С. 203–208.
4. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 528 с.
5. Шабловский, О. Н. Релаксационный теплоперенос в нелинейных средах / О. Н. Шабловский. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2003. – 382 с.
6. Шабловский, О. Н. К вопросу о генерации периодических температурных полей объемными источниками энергии / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль, И. А. Концевой // Вестн. Гомел. гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 73–81.
7. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
8. Лэм, Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. – М. : Мир, 1983. – 294 с.

Получено 22.02.2012 г.