

ГИДРОМЕХАНИКА

П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ
БУМАГЕ**

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 III 1952)

Для решения задач фильтрации, которые описываются уравнением Лапласа, Н. Н. Павловский⁽⁴⁾ разработал метод электродинамических аналогий (ЭГДА). Этот метод учениками и последователями Н. Н. Павловского был усовершенствован и применен как для решения весьма сложных задач фильтрации, включая пространственные задачи, так и для решения задач движения нефти, струйного течения и др.^(1, 3, 5). Но в методе ЭГДА все еще полностью не разработан вопрос электропроводной среды, которая должна удовлетворять следующим требованиям: 1) электропроводность среды должна быть постоянной во времени и в пределах заданной зоны; 2) коэффициент электропроводности должен легко регулироваться в широких пределах с достаточной для практики точностью; 3) между питающими шинами и средой должна отсутствовать контактная разность потенциалов; 4) среда должна допускать установку надежно-го стабильного контакта между зонами различной проводимости; 5) механическая обработка среды должна быть легкой.

В этой заметке излагаются первые результаты, полученные на электропроводной бумаге, разработанной в Центральном научно-исследовательском институте бумаги для Института математики АН УССР.

1. Исследованные нами образцы бумаги в течение 4 месяцев не изменили своей электропроводности. Удельное сопротивление различных сортов бумаги может колебаться от десятков ом до десятков мегом на 1 см². Контактная разность между металлическими шинами и бумагой ничтожна и на результаты измерений не влияет. Проводимость бумаги электронная, поэтому возможна работа на постоянном токе. Механическая обработка проста, а контакт между зонами осуществляется при помощи электропроводного клея следующего состава *: желатина фотографического 5—10%, глицерина 0,5—1%, спирта 96°

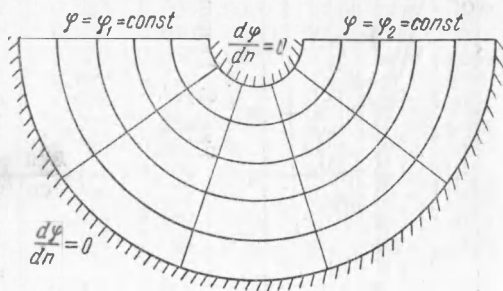


Рис. 1

* Рецепт клея разработан В. И. Панчишиным. Этот же клей испытывался в качестве электропроводных красок и дал положительные результаты.

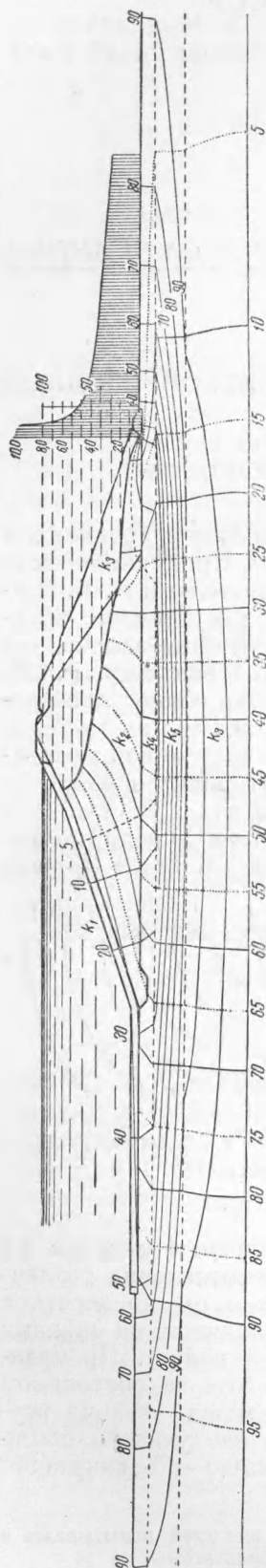


Рис. 2. Гидромеханическая сетка для плотины

15—20%, сажи ацетиленовой 0,5—5%, сапона 1—2%, воды 78—62%. Электропроводность этого клея в зависимости от его состава изменяется в очень широких пределах. Таким образом, соответствующий набор бумаг позволяет моделировать практически любую плоскую задачу фильтрации.

2. К недостаткам первых образцов бумаги надо отнести ее электрическую неоднородность, которая имеет порядок $\pm 10\%$. Выясним на контрольных задачах влияние этой неоднородности на точность результатов.

Задача 1. Фильтрация между двумя концентрическими окружностями. Для данной задачи легко построить гидродинамическую сетку (рис. 1). Измерим потенциал φ (в % от $\varphi_1 - \varphi_2$) вдоль теоретических эквипотенциалей в узлах сетки и в тех же точках определим удельное сопротивление бумаги * ρ . Результаты приведены в табл. 1.

Задача 2. Фильтрация под плоским флютбетом. Комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ для плоского флютбета при $T < \infty$ определяется формулой:

$$k \operatorname{sn}(w, k) = \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T}, \quad \text{где } k = \operatorname{th} \frac{\pi b}{2T},$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} \frac{k \operatorname{sn}(\varphi, k) \operatorname{dn}(\psi, k')}{\operatorname{cn}^2(\psi, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k) \operatorname{sn}^2(\psi, k')} &= \\ &= \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{T}}{2 \left(\cos^2 \frac{\pi y}{2T} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2T} \right)}, \\ \frac{k \operatorname{cn}(\varphi, k) \operatorname{dn}(\varphi, k) \operatorname{sn}(\psi, k') \operatorname{cn}(\psi, k')}{\operatorname{cn}^2(\psi, k') + k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k) \operatorname{sn}^2(\psi, k')} &= \\ &= \frac{\sin \frac{\pi y}{T}}{2 \left(\cos^2 \frac{\pi y}{2T} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi x}{2T} \right)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Задавая значениями φ, ψ , определяем x, y из системы (1), после чего в найденных точках измеряем на соответствующих моделях φ и ψ . Результаты приведены в табл. 2.

* Чтобы свести к минимуму случайные погрешности, величина ρ определялась следующим образом. Бумажная модель разрезалась вдоль эквипотенциалей на полосы шириною в 1 см специальным ножом с двумя жестко закрепленными лезвиями. Эти полосы помещались между зажимами с жестко закрепленными плоско-параллельными губками, установленными на расстоянии 1 см, и компенсационным методом измерялось сопротивление 1 см² бумаги.

Таблица 1

	Номера точек										Ф _{теор} , %
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Ф _{изм} %	9,8	9,9	9,7	10,0	10,0	10,2	10,2	10,3	10,3	10,1	10,0
ρΩ·10 ² /см ²	18,2	19,8	16,3	20,6	19,2	19,3	19,5	19,7	18,3	17,6	
Ф _{изм} %	20,1	20,0	20,1	19,9	20,2	20,4	20,1	19,8	19,9	20,1	20,0
ρΩ·10 ² /см ²	20,9	17,5	18,6	18,9	18,3	20,5	17,1	16,7	20,8	18,5	
Ф _{изм} %	30,5	30,5	30,7	30,7	30,5	30,5	30,4	30,2	30,2	30,3	30,0
ρΩ·10 ² /см ²	18,8	17,8	18,8	18,0	19,4	20,1	20,1	14,5	17,5	19,1	
Ф _{изм} %	40,3	40,3	40,3	40,2	40,6	40,7	40,7	40,7	40,5	40,6	40,0
ρΩ·10 ² /см ²	15,3	15,3	17,8	17,1	16,5	18,4	16,9	20,2	16,9	16,1	
Ф _{изм} %	50,1	50,5	50,3	50,4	50,5	50,6	50,5	50,7	50,6	50,7	50,0
ρΩ·10 ² /см ²	17,3	21,0	18,7	19,8	18,6	21,7	19,2	20,3	14,8	27,0	
Ф _{изм} %	60,4	60,2	60,7	60,5	60,3	60,5	60,4	60,7	60,4	60,3	60,0
ρΩ·10 ² /см ²	20,3	21,6	22,0	18,3	20,4	21,4	17,8	21,3	21,9	18,2	
Ф _{изм} %	70,4	70,5	70,8	70,7	70,7	70,6	70,5	70,3	70,3	70,4	70,0
ρΩ·10 ² /см ²	15,7	17,9	17,1	19,6	20,7	22,6	18,2	16,8	16,9	18,3	
Ф _{изм} %	80,4	80,3	80,3	80,0	79,8	80,0	80,0	79,6	79,8	79,5	80,0
ρΩ·10 ² /см ²	16,6	17,9	14,9	14,9	16,4	13,0	15,1	17,9	16,1	17,5	
Ф _{изм} %	90,3	90,2	90,2	90,3	90,0	90,0	89,9	89,8	89,8	89,9	90,0
ρΩ·10 ² /см ²	16,8	18,9	16,9	18,1	16,8	17,1	16,3	16,9	17,3	18,7	

Таблица 2

x	y	Вычисленные		Измеренные		x	y	Вычисленные		Измеренные	
		φ, %	ψ, %	φ, %	ψ, %			φ, %	ψ, %	φ, %	ψ, %
1,000	0,000	100,0	0,0	99,8	0,2	0,933	0,000	90,0	0,0	89,6	0,1
1,007	0,000	100,0	10,0	99,8	9,8	0,937	0,040	90,0	10,0	89,8	9,5
1,027	0,000	100,0	20,0	99,9	20,3	0,958	0,082	90,0	20,0	89,9	20,1
1,063	0,000	100,0	30,0	99,9	30,1	0,980	0,127	90,0	30,0	89,7	29,8
1,116	0,000	100,0	40,0	99,7	39,4	1,018	0,178	90,0	40,0	90,2	39,7
1,190	0,000	100,0	50,0	99,8	49,7	1,069	0,238	90,0	50,0	90,0	50,4
1,292	0,000	100,0	60,0	99,8	59,3	1,130	0,309	90,0	60,0	90,3	60,3
1,436	0,000	100,0	70,0	99,8	69,5	1,201	0,402	90,0	70,0	89,9	69,6
1,644	0,000	100,0	80,0	99,9	79,5	1,276	0,520	90,0	80,0	89,6	79,8
2,025	0,000	100,0	90,0	99,9	89,6	1,335	0,680	90,0	90,0	90,1	90,3
∞	0,000	100,0	100,0	100,0	99,8	1,354	0,884	90,0	100,0	89,8	99,8
0,759	0,000	80,0	0,0	79,8	0,3	0,000	0,000	50,0	0,0	49,6	0,2
0,761	0,066	80,0	10,0	79,7	9,7	0,000	0,084	50,0	10,0	49,5	10,0
0,771	0,134	80,0	20,0	79,6	19,8	0,000	0,168	50,0	20,0	49,5	20,4
0,783	0,203	80,0	30,0	79,9	29,5	0,000	0,253	50,0	30,0	49,7	29,7
0,801	0,277	80,0	40,0	80,2	40,2	0,000	0,339	50,0	40,0	50,0	39,6
0,824	0,358	80,0	50,0	80,2	50,5	0,000	0,425	50,0	50,0	50,2	49,8
0,847	0,445	80,0	60,0	80,3	60,4	0,000	0,511	50,0	60,0	50,2	60,4
0,870	0,539	80,0	70,0	80,2	70,6	0,000	0,599	50,0	70,0	50,1	69,9
0,890	0,642	80,0	80,0	80,3	80,0	0,000	0,687	50,0	80,0	49,8	80,3
0,904	0,751	80,0	90,0	79,8	89,8	0,000	0,774	50,0	90,0	49,7	90,2
0,907	0,864	80,0	100,0	79,7	99,9	0,000	0,864	50,0	100,0	49,9	99,7

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу: благодаря усреднению по площади при моделировании уравнения Лапласа на бумаге с электрической неоднородностью порядка ±10% достижения точность ±1%.

Этот интересный экспериментальный факт позволяет высказывать гипотезу, что решение уравнения эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A_1(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[A^2(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0, \quad (2)$$

коэффициенты которого являются случайными величинами и могут быть представлены в виде

$$A_i(x, y) = C + \delta_i^1(x, y), \quad (i = 1, 2)$$

(где C — постоянная, $\delta_k(x, y)$ — величины малые по сравнению с C), будет отклоняться от решения соответствующего уравнения Лапласа на величину

$$\varepsilon(x, y) \ll \sup \delta_k(x, y). \quad (3)$$

3. В заключение приведем решение довольно сложной задачи фильтрации, выполненное на электропроводной бумаге, для того, чтобы показать ее возможности.

Задача 3. Фильтрация через земляную плотину с экраном в неоднородном грунте. Геологический разрез тела плотины и грунта основания показан на рис. 2. Отношение коэффициентов фильтрации различных зон следующее:

$$k_1 : k_2 = 0,2; \quad k_3 : k_2 = 35,0; \quad k_4 : k_2 = 5,7; \quad k_5 : k_2 = 160.$$

При моделировании прежде всего была определена обычным подбором ((²), стр. 68) кривая депрессии, после чего была построена гидродинамическая сетка движения, которая полностью и решает задачу. Точность моделирования 3—5%; $k_{\max} : k_{\min} = 800$. Возможное время решения не ограничено, так как модель задачи практически во времени не изменяется. Последнее обстоятельство весьма существенно при решении серии сложных, связанных между собою задач.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
16 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Аравин и Н. И. Дружинин, Изв. ВНИИГ, 40, 3 (1949). ² В. И. Аравин и С. Н. Нумеров, Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений, 1948. ³ С. Н. Нумеров, Изв. ВНИИГ, 42, 16 (1950). ⁴ Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, Л., 1922. ⁵ Л. А. Сергеев, Изв. Азерб. филиала АН СССР, 88 (1930).