

МАТЕМАТИКА

А. М. ВАСИЛЬЕВ

ОБЩИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1951)

1. Несмотря на то, что изучению общих свойств рассматриваемых в дифференциальной геометрии объектов уделяется сейчас много внимания, мы до сих пор не имели инвариантной алгебраической схемы дифференциально-геометрического исследования. Только в последнее время Г. Ф. Лаптев показал, что данная им стройная алгебраическая схема продолжений и охватов представлений конечных групп Ли осуществляет полное описание дифференциальной геометрии многообразия, вложенного в однородное пространство с конечной фундаментальной группой или в пространство с соответствующей связностью ⁽¹⁾. В настоящей работе общая задача рассматривается как обобщение построений Г. Ф. Лаптева на пространства представлений бесконечных групп Ли.

2. Теория непрерывных (конечных или бесконечных) групп преобразований, задаваемых аналитическими определяющими уравнениями на аналитических многообразиях, основывается, по Картану, на следующих фактах ⁽²⁾.

Присоединяя, в случае необходимости, к параметрам многообразия новые переменные, всякую такую группу можно рассматривать как наиболее общую группу, которая оставляет инвариантными линейно независимые формы ω^i и некоторое число функций u^λ . Внешние дифференциалы форм и дифференциалы инвариантов имеют вид:

$$D\omega^i = c_{kl}^i [\omega^k \omega^l] + a_{kp}^i [\omega^k \omega^p],$$
$$du^\lambda = v_k^\lambda \omega^k,$$
(1)

где формы ω^p линейно независимы между собою и от форм ω^i , а c_{kl}^i , a_{kp}^i и v_k^λ зависят лишь от инвариантов u^λ . Группы, для которых эти функции одинаковы, изоморфны, а представления их в пространствах, координаты которых образуют функциональный базис интегралов системы $\omega^i = 0$, подобны. Эти „основные представления“ имеют определяющие уравнения первого и нулевого порядков. Другие представления, обладающие этим свойством, получаются из основных с помощью двух операций: а) „нормального продолжения“, которое сводится к включению форм ω^p в число инвариантных форм группы, и б) расширения преобразуемого многообразия за счет присоединения новых

переменных, инвариантных при преобразованиях группы. Уравнения, которые для нормального продолжения играют ту же роль, что уравнения (1) для основного представления, получаются дифференцированием уравнений (1) и развертыванием полученных тождеств.

Говорят, что одно представление охватывает другое, если переменные, преобразуемые одним представлением, являются функциями переменных, преобразуемых другим. Задача отыскания представлений, которые охватываются данным представлением, имеющим определяющие уравнения не выше первого порядка, сводится к задаче отыскания всевозможных вполне интегрируемых систем Пфаффа, составленных из инвариантных форм ω^i с коэффициентами, зависящими лишь от инвариантов. Если одна из таких систем является подсистемой другой, то первое представление охватывается вторым. Верно и обратное предложение. Наконец, имеет место теорема: всякое представление группы, заданной структурными уравнениями (1), охватывается некоторым представлением, полученным из основного с помощью конечного числа операций (а) и (б). Эти результаты Картана и дают алгебраическое описание структуры представлений группы.

3. Пусть в некотором пространстве представления группы задано аналитическое подмногообразие. Вдоль него независимые инвариантные формы пространства можно выразить через некоторое число этих форм, независимых на подмногообразии:

$$\omega^\alpha = \lambda_a^\alpha \omega^a, \quad \alpha = p+1, \dots, n, \quad a = 1, \dots, p. \quad (2)$$

Продифференцируем эти уравнения внешним образом и развернем полученные уравнения:

$$d\lambda_a^\alpha + \theta_a^\alpha = \lambda_{ab}^\alpha \omega^b. \quad (3)$$

Здесь θ_a^α — линейные комбинации форм ω^i , ω^o с коэффициентами — функциями от u^λ и λ_a^α . Можно проверить, что при независимости величин λ_a^α формы $d\lambda_a^\alpha + \theta_a^\alpha$ вместе с формами ω^α , ω^a образуют вполне интегрируемую систему. Следовательно, они определяют представление группы, охватываемое представлением, которое получается из основного однократным нормальным продолжением и присоединением инвариантов λ_a^α . Это представление можно назвать p -мерным продолжением первого порядка исходного представления. Уравнения (2), (3) определяют в этом пространстве подмногообразие размерности p — многообразие касательных элементов к подмногообразию (2). Повторяя подобные же построения для этого подмногообразия, придем ко второму продолжению исходного представления и исходных уравнений, и т. д.

Основой дифференциально-геометрического исследования многообразия является построение всевозможных представлений, охватываемых продолженными указанным образом представлениями, и изучение соотношений между ними.

Из изложенного выше ясно, какова алгебраическая схема построения.

4. Остается заметить, что многообразия, вложенные в пространства представлений бесконечных или конечных групп Ли, являются основным объектом всех дифференциально-геометрических исследований, т. е. всех исследований, выполнимых с помощью классического дифференциального исчисления. Для иллюстрации этого положения дадим несколько примеров наиболее употребительных многообразий указанного вида.

Пример 1. Пусть представление A охватывает представление B . Подмногообразия пространства A , точки которых поставлены уравнениями охвата во взаимно-однозначное соответствие (локально) с точками пространства B , образуют „поля геометрических объектов“ $(1, 3)^*$.

Пример 2. „Вложенные многообразия“ — собственные подмногообразия многообразий предыдущего типа.

Пример 3. Наиболее общие пространства геометрических элементов со связностью, структура которых дана Г. Ф. Лаптевым (4) , представляют собой:

а) поля геометрических объектов, у которых представления B имеют определяющие уравнения первого порядка, представления A — нормальные продолжения предыдущих и правые части уравнений (2) линейно зависят от форм $a^i_{kr} \omega^k$ (см. уравнение (1));

б) подмногообразия предыдущих многообразий, на которых формы $a^i_{kr} \omega^k$ линейно независимы.

Пример 4. В п. 3 указано построение p -мерных продолжений любого порядка исходного представления. Подмногообразия всякого полученного таким образом пространства представления, имеющие размерность не меньшую размерности исходного пространства и отображение которых в исходное пространство есть (локально) отображение на пространство, определяют в исходном пространстве системы дифференциальных уравнений наиболее общего вида. Общая теория дифференциальных уравнений получится, если наша группа есть группа всех аналитических преобразований пространства.

Множество других примеров можно найти в любой главе дифференциальной геометрии.

В заключение выражаю благодарность проф. С. П. Финикову и Г. Ф. Лаптеву за руководство и помощь в работе.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Ф. Лаптев, ДАН, 78, № 2 (1951). ² E. Cartan, Ann. Éc. Norm. Sup., 21, 159 (1904); 22, 219 (1905). ³ В. В. Вагнер, Прилож. к кн. О. Веблен и Д. Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, М., 1949. ⁴ Г. Ф. Лаптев, ДАН, 73, № 1 (1950).

* Имеет смысл обобщить понятие геометрического объекта и называть так точку любого пространства представления группы.