Для придания компактной формы выражения (8) запишем слагаемое $2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}$ в следующем виде:

$$2\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} = 2\left(2g^{\rho\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\right)\gamma^{\nu} = 4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - 2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}; \qquad (9)$$

с учетом (7)–(9) для (6) окончательно получаем:

$$\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = \left(A_1\right)_{\nu}\left(A_2\right)_{\rho}\left(A_3\right)_{\sigma}\left(4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - 2\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} - 4g^{\rho\sigma}\gamma^{\nu} - (d-4)\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) =$$

$$= -2\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_1 - \left(d-4\right)\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3. \qquad (10)$$

Отметим, что в случае размерности пространства-времени $d = 4$ выражение (10) упростится до $\gamma^{\mu}\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\gamma_{\mu} = -2\hat{A}_3\hat{A}_2\hat{A}_1$, что совпадает с известным выражением [4, 5]. Полученные в разделе выражения могут быть использованы для расчета произведений $\gamma$ – матриц Дирака, в том числе с матрицей $\gamma_5$.

В работе представлены элементарные соотношения из алгебры матриц Дирака для случая размерности пространства-времени $d \neq 4$. Полученные в работе соотношения могут быть использованы как при расчете поляризации вакуума, так и для других расчетов поправок в вершинную функцию.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 4. Квантовая электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд. испр. – Москва : Наука, 1989. – 728 с.
2. Пенскин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 784 с.
3. Romao, J. C. Modern techniques for one-loop calculation / J. C. Romao. – Departamento de Fisica, Instituto Superior Tecnico, Portugal, 2004. – 81 p.
4. Grozin, A. Lectures on QED and QCD: practical calculation and renormalization of one- and multi-Loop feynman diagrams / A. Grozin // World Scientific Publishing Company, 2007. – 236 p.
5. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1981. – 432 с.

УДК 539.12

# РАСЧЕТ ОДНОПЕТЛЕВОГО ИНТЕГРАЛА ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНИИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**В. Ю. Гавриш, А. Д. Тамков**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь*

*Кратко продемонстрирована методика расчета петлевых интегралов квантовой электродинамики на примере однопетлевой диаграммы электронной линии. Показано, что процедура параметризации Фейнмана с последующей размерной регуляризацией может быть использована для подобных вычислений.*

**Ключевые слова:** квантовая электродинамика, петлевой интеграл, параметризация Фейнмана, размерная регуляризация.

# ONE-LOOP INTEGRAL CALCULATION ELECTRON LINE QUANTUM ELECTRODYNAMICS

**V. Yu. Haurysh, A. D. Tamkov**

*Sukhoi State Technical University of Gomel, the Republic of Belarus*

*The paper briefly demonstrates a method for quantum electrodynamics loop integrals calculating for one-loop diagram of an electron line example. It is shown that the Feynman parameterization procedure with subsequent dimensional regularization can be used for such calculations.*

**Keywords:** quantum electrodynamics, loop integral, Feynman parameterization, dimensional regularization.

**Введение.** На сегодняшний день квантовая электродинамика (далее – КЭД) является успешной теорией, описывающей взаимодействие фотонов с электронами. Классические процессы КЭД, такие как комптоновское рассеяние, аннигиляция электрон-позитронной пары и другие стали базовыми при изучении КЭД [1, 2]. Однако расчеты КЭД в высших порядках теории возмущений осложнены математически. Известно, что прямые расчеты петлевых интегралов приводят к расходящимся результатам. Указанная особенность привела к альтернативным методам, среди которых выделим подход, основанный на размерной регуляризации интегралов Фейнмана.

Работа носит методический характер: кратко продемонстрирована процедура размерной регуляризации на примере расчета однопетлевой диаграммы электронной линии [1–3]. Авторами показано, что процедура параметризации Фейнмана с последующим переходом к размерности пространства-времени $d \neq 4$ приводит к известным результатам [3].

**Постановка задачи.** Графическое изображение поправки к электронной линии КЭД в простейшем случае примет вид, представленный на рис. 1.

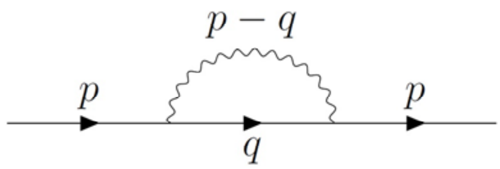


*Рис. 1.* Диаграмма Фейнмана поправки к электронной линии КЭД

Соответствующий рис. 1 матричный элемент с использованием правил Фейнмана [1–3] запишется в виде:

$$-i\Sigma(\hat{p}) = \left(-ie\right)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu}\,\frac{i\,(\hat{q}+m)}{q^2-m^2}\gamma^{\nu}\,\frac{-ig_{\mu\nu}}{\left(p-q\right)^2}. \tag{1}$$

Анализ выражения (1) показывает, что интеграл расходится в пределе $q \to \infty$, поскольку степень числителя больше. Для дальнейшего вычисления объединим знаменатели выражения (1) с использованием параметризации Фейнмана [3]:

$$\frac{1}{a\,b} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{\left(ax+b(1-x)\right)^2}. \tag{2}$$

С использованием (2) знаменатель выражения (1) может быть записан в виде:

$$\frac{1}{q^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2}=\int_0^1 dx\frac{1}{\left(x(p-q)^2+(1-x)\left(q^2-m^2\right)\right)^2}=$$

$$=\int_0^1 dx\frac{1}{\left(q^2-2x(pq)+xp^2-m^2+xm^2\right)^2}. \tag{3}$$

Дальнейшие вычисление проведем с использованием подстановки $\ell=q-xp$. С учетом последнего выражение (3) примет вид:

$$\int_0^1 dx\frac{1}{\left(q^2-2x(pq)+xp^2-m^2+xm^2\right)^2}=\int_0^1 dx\frac{1}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}, \tag{4}$$

где определена вспомогательная величина $a^2=(1-x)(m^2-x\,p^2)$. Подстановка (4) в выражение (1) после некоторых дополнительных вычислений проводит к

$$-i\Sigma(\hat{p})=\left(-ie\right)^2\int_0^1 dx\int\frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\gamma^{\mu}\frac{(\hat{\ell}+x\,\hat{p}+m)}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}\gamma_{\mu}. \tag{5}$$

Дальнейшие вычисления выражения (5) проведем с использованием процедуры размерной регуляризации.

**Размерная регуляризация петлевого интеграла.** Вычисление сверток матриц Дирака выражения (5) проведем с использованием соотношений:

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}=d,\ \gamma^{\mu}\hat{A}\gamma_{\mu}=\hat{A}\left(2-d\right), \tag{6}$$

определенных в $d\neq 4$ размерном пространстве-времени. Полагая $d=4-\varepsilon$, получаем:

$$\gamma^{\mu}(\hat{\ell}+x\,\hat{p}+m)\gamma_{\mu}=-(2-\varepsilon)(\hat{\ell}+x\,\hat{p})+(4-\varepsilon)m, \tag{7}$$

откуда

$$-i\Sigma(\hat{p})=-e^2\mu^{\varepsilon}\int_0^1 dx\int\frac{d^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{-(2-\varepsilon)(\hat{\ell}+x\,\hat{p})+(4-\varepsilon)m}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}, \tag{8}$$

где параметр $\mu$ введен для сохранения размерности. Поскольку линейные по $\hat{\ell}$ слагаемые при интегрировании не дадут вклад [1–4], выражение (8) примет вид:

$$-i\Sigma(\hat{p})=-e^2\mu^{\varepsilon}\int_0^1 dx\int\frac{d^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{-(2-\varepsilon)x\,\hat{p}+(4-\varepsilon)m}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}. \tag{9}$$

Выполняя поворот Вика [4] в выражении (9), получаем:

$$\mu^{\varepsilon}\int\frac{d^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}\rightarrow i\mu^{\varepsilon}\int\frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(\ell_E^2+a^2\right)^2}; \tag{10}$$

непосредственное вычисление с использованием специальных функций приводит к

$$i\mu^{\varepsilon}\int\frac{d^d\ell_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(\ell_E^2+a^2\right)^2}=i\mu^{\varepsilon}\frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d}\Gamma\left(\varepsilon/2\right)\frac{1}{\left(a^2\right)^{\varepsilon/2}}. \quad (11)$$

Анализ выражения (11) показывает, что при $\varepsilon = 0$ расходимость обусловлена наличием полюса Гамма-функции Эйлера. Подстановка (11) в (9) окончательно приводит к

$$-i\Sigma(\hat{p})=-ie^2\frac{\mu^{\varepsilon}}{\left(4\pi\right)^{d/2}}\int_0^1 dx\,\Gamma\left(\varepsilon/2\right)\frac{(4-\varepsilon)m-\left(2-\varepsilon\right)x\hat{p}}{\left((1-x)(m^2-x\,p^2)\right)^{\varepsilon/2}}. \quad (12)$$

Дальнейшие расчеты выражения (12) связаны с разложением в ряды по малым степеням $\varepsilon$. Так, к примеру

$$\Gamma\left(\varepsilon/2\right)=\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+O(\varepsilon), \quad (13)$$

где $\gamma_E$ – постоянная Эйлера–Маскерони (подробные вычисления изложены в [3]). С использованием (12), (13) а также условий:

$$\Sigma(\hat{p}=m)=0, \qquad \left.\frac{d\Sigma(\hat{p})}{d\hat{p}}\right|_{\hat{p}=m}=0, \quad (14)$$

проводят процедуру перенормировки массы электрона, однако указанные вычисления довольно громоздки [4, 5].

В работе проведено вычисление однопетлевой поправки к электронной линии квантовой электродинамики. В ходе работы авторами изложены метод параметризации Фейнмана, а также процедура размерной регуляризации для расчета петлевого интеграла. Полученные в работе выражения используются для расчета контрчленов $\delta$ КЭД.

Литература

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 4. Квантовая электродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд., испр. – Москва : Наука, 1989. – 728 с.
2. Пенскин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 784 с.
3. Romao, J. C. Modern techniques for one-loop calculation / J. C. Romao. – Departamento de Fisica, Instituto Superior Tecnico, Portugal, 2004. – 81 p.
4. Grozin, A. Lectures on QED and QCD: practical calculation and renormalization of one- and multi-Loop feynman diagrams / A. Grozin // World Scientific Publishing Company, 2007. – 236 p.
5. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1981. – 432 с.