

В. М. ХОДЫРЕВА

О МИНИМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ КРУГА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 X 1949)

Будем рассматривать ограниченные открытые области G . Все интегралы по G , которые будут встречаться, будем понимать как несобственные, т. е. как пределы интегралов по замкнутым областям G_j , лежащим в G , причем таким, что G_j содержится в G_{j+1} и любая точка области G принадлежит по крайней мере одной из G_j .

Введем следующие определения:

1. Функциональному пространству $\mathcal{D}_i$ принадлежат все функции $\varphi(x, y)$ пространства $\mathcal{D}_{i-1}$, непрерывные в G вместе с производными порядка $\leq i-1$ и имеющие кусочно-непрерывные производные порядка i , для которых существуют интегралы:

$$D_j[\varphi] = \iint_G \sum_{m=0}^{m=j} \frac{j!}{(j-m)! m!} \left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial x^{j-m} \partial y^m} \right)^2 dx dy \quad (j=0, 1, \dots, i),$$

где $D_0[\varphi] = \iint_G \varphi^2 dx dy$.

2. Функциональному пространству $\mathcal{D}_i$ принадлежит любая функция $\varphi(x, y)$ из $\mathcal{D}_i$, для которой существует такое положительное число ε , что $\varphi(x, y)$ и ее производные порядка $\leq k-1$ обращаются в нуль во всех точках области G , расстояние которых от границы области $\leq \varepsilon$.

3. Функциональному пространству $\mathcal{D}_i$ принадлежит любая функция $\varphi(x, y)$ из $\mathcal{D}_i$, для которой существует такая последовательность $\varphi^\nu(x, y)$ из $\mathcal{D}_i$, что выполняются соотношения:

$$D_j[\varphi^\nu - \varphi] \rightarrow 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots, i; \nu \rightarrow \infty).$$

Теорема 1. Среди всех плоских областей G , ограниченных кусочно-гладкими кривыми Γ данной длины, наименьшим возможным собственным значением дифференциального уравнения

$$(-1)^k \Delta^k u - \lambda u = 0, \tag{1}$$

где

$$\Delta^k u = \sum_{m=0}^{m=k} \frac{k!}{(k-m)! m!} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2(k-m)} \partial y^{2m}},$$

обладает круг и только круг.

Легко показать, что наименьшее (первое) собственное значение уравнения (1), рассматриваемого в области G плоскости XY , определяется как минимум интеграла

$$D_k[u] = \iint_G \sum_{m=0}^{m=k} \frac{k!}{(k-m)! m!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-m} \partial y^m} \right)^2 dx dy, \quad (2)$$

если для сравнения допускаются все функции u из $\overset{0}{D}_k$, удовлетворяющие дополнительному условию

$$\iint_G u^2 dx dy = 1. \quad (3)$$

Функция u из $\overset{0}{D}_k$, для которой достигается минимум интеграла (2) при условии (3), называется первой собственной функцией. Всюду в области G она удовлетворяет уравнению (1).

О первом собственном значении дифференциального уравнения (1) и о регулярных решениях этого уравнения справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Первое собственное значение любой области G' , целиком лежащей в G , больше первого собственного значения области G .*

Теорема 3. *Первое собственное значение изменяется непрерывно вместе с областью.*

Пусть область G переходит в область G_1 при точечном преобразовании

$$\alpha = x + \psi(x, y), \quad \beta = y + \xi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ и $\xi(x, y)$ — непрерывные в $G + \Gamma$ функции (Γ — граница области G), и пусть

$$|\psi(x, y)| < \varepsilon, \quad |\xi(x, y)| < \varepsilon;$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$, то будем говорить, что G непрерывно переходит в G_1 .

Теорема 4. *Первое собственное значение является простым, т. е. не имеется, не принимая во внимание знак, двух различных первых собственных функций.*

Доказательство. Покажем сначала, что первая собственная функция u не изменяет знака в G . Допустим противное. Обозначим области, в которых u положительна, G_+ и в которых отрицательна G_- ; кривые, разделяющие эти области, обозначим через C . Заменяем u ее абсолютным значением

$$u' = |u|.$$

Образуем функцию

$$w = u' + \xi \varphi(x, y) + \eta \psi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — функции из $\overset{0}{D}_k$, обладающие непрерывными производными порядка k ; ξ и η — параметры, которые будут впоследствии выбраны надлежащим образом и так, чтобы

$$\iint_G (u')^2 dx dy = \iint_G w^2 dx dy = 1,$$

откуда

$$0 = 2 \iint_G u' (\xi \varphi + \eta \psi) dx dy + \iint_G (\xi \varphi + \eta \psi)^2 dx dy. \quad (4)$$

Пусть $\iint_G u' \varphi dx dy$ и $\iint_G u' \psi dx dy$ не равны одновременно нулю; тогда ξ и η могут быть выбраны сколь угодно малыми. Учитывая равенство (4), получим:

$$\begin{aligned} D_k[w] - D_k[u'] &= D_k[\xi\varphi + \eta\psi] - \lambda D_0[\xi\varphi + \eta\psi] + \\ &+ \sum_{m=0}^{m=k} \frac{k!}{(k-m)! m!} \left\{ \int_{C_+} \frac{\partial^k u'_+}{\partial x^{k-m} \partial y^m} \frac{\partial^{k-1} (\xi\varphi + \eta\psi)}{\partial x^{k-m-1} \partial y^m} \sin(n, y) ds + \right. \\ &+ \int_{C_-} \frac{\partial^k u'_-}{\partial x^{k-m} \partial y^m} \frac{\partial^{k-1} (\xi\varphi + \eta\psi)}{\partial x^{k-m-1} \partial y^m} \sin(n, y) ds + \dots \\ &\dots + (-1)^{k-1} \int_{C_+} \frac{\partial^{2k-1} u'_+}{\partial x^{k-m} \partial y^{2m-1}} (\xi\varphi + \eta\psi) \cos(n, y) ds + \\ &\left. + (-1)^{k-1} \int_{C_-} \frac{\partial^{2k-1} u'_-}{\partial x^{k-m} \partial y^{2m-1}} (\xi\varphi + \eta\psi) \cos(n, y) ds \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что $D_k[w] - D_k[u']$ может быть сделано отрицательным при достаточно малых $|\xi|$ и $|\eta|$ и подходящем выборе $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, т. е. u' , а следовательно и u , не сообщает минимума интегралу (2). Наконец, теорема 4 следует из того, что из двух линейно независимых решений u_1 и u_2 , относящихся к первому собственному значению, можно образовать третье $au_1 + bu_2$, удовлетворяющее условию ортогональности; это возможно только тогда, когда первая собственная функция меняет знак.

Теорема 5. Пусть граница области G содержит прямолинейную часть g . Будем называть решение u уравнения (1) регулярным в $G + g$, если оно непрерывно вместе со своими производными порядка $\leq 2k$ в $G + g$. Тогда, если решение u уравнения (1) регулярно в $G + g$ (разве только за исключением конечных точек g) и если на g соблюдаются условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

где n — нормаль к g , то u можно аналитически продолжить в область G' , возникающую из G путем зеркального отражения относительно g , при этом значения u в точках G' будут равны значениям u в соответствующих точках G .

Теперь докажем теорему 1. Первые собственные значения уравнения (1) для различных областей с заданной длиной контура обладают нижней границей, следовательно, имеется последовательность G_n таких областей, для которых первые собственные значения стремятся к нижней границе λ . Подобно Куранту⁽³⁾, рассматривавшему сформулированную в теореме 1 задачу для уравнения

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (7)$$

аппроксимируем области G_n многоугольниками, из которых составляем минимальную последовательность многоугольников M_i , т. е. такую последовательность многоугольников, для которой первые собственные значения стремятся к нижней границе λ . На основании теоремы 2 каждый такой многоугольник является выпуклым.

На любой диагонали многоугольника M_i , делящей периметр его пополам (будем называть такую диагональ главной), выполняются

условия (6), что доказывается аналогично соответствующему доказательству у Куранта (3). Отражая симметрично относительно OA и $OA_1 \triangle OAA_1$, образованный стороной AA_1 многоугольника M_i и отрезками главных диагоналей OA и OA_1 , и продолжая аналитически указанным в теореме 5 способом первую собственную функцию u , получим путем повторения этого процесса общее течение функции в некотором многоугольнике. Отображенный образ стороны AA_1 должен совпадать со стороной многоугольника M_i , так как в противном случае мы бы пришли в противоречие с теоремой 2. Отсюда следует, что M_i состоит из $2i$ подобных треугольников, причем соседние симметричны относительно общей стороны. Совершая предельный переход при $i \rightarrow \infty$, получим, что минимальные многоугольники сходятся к кругу с длиной окружности l , первое собственное значение которого равно предельному значению первых собственных значений минимальных многоугольников. Однозначность может быть доказана способом от противного. Теорема 1 доказана.

Если из всех указанных выше областей выбрать только области, ограниченные гладкими кривыми, заданными уравнениями

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (8)$$

где s — дуга кривой Γ , а $x(s)$, $y(s)$ — непрерывные вместе с производными по s порядка $\leq k$ функции, то теорема, конечно, остается в силе, но в этом случае принадлежность функции u , являющейся решением уравнения (1), пространству $\bar{D}_k^0$ означает действительное обращение в нуль на контуре Γ области G функции u и ее производных порядка $\leq k-1$, что нетрудно доказать, так как С. Л. Соболевым (1) установлено, что из существования интегралов от квадратов производных до некоторого порядка j функции многих независимых переменных следует существование на границе рассматриваемой области предельных значений функции и ее производных до некоторого порядка, причем он рассматривает границу состоящей из многообразий разной размерности.

Справедлива также теорема, аналогичная теореме 1, но относящаяся к уравнению

$$\Delta^2 u - a \Delta u - \lambda u = 0 \quad (a = \text{const} > 0). \quad (9)$$

Первое собственное значение уравнения (9) определяется как минимум интеграла

$$\iint_G \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + a \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (10)$$

при условии

$$\iint_G u^2 dx dy = 1, \quad (11)$$

если для сравнения допускаются все функции u из $\bar{D}_2^0$. И в этом случае из всех областей с заданной длиной контура круг обладает наименьшим первым собственным значением.

Удмуртский государственный
педагогический институт
г. Ижевск

Поступило
16 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44), 467 (1937). ² С. Л. Соболев, Математика в СССР за 30 лет, 1917—1947. ³ R. Courant, Math. Zs., 321 (1918).