

В. БОЛТЯНСКИЙ

**ПРИМЕР ДВУМЕРНОГО КОМПАКТА, ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ
КВАДРАТ КОТОРОГО ИМЕЕТ РАЗМЕРНОСТЬ, РАВНУЮ ТРЕМ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1949)

Зафиксируем произвольное простое число p . Пусть K — круговое кольцо, α и β — его края. отождествим между собой каждые p точек окружности α , разбивающие ее на p равных дуг. отождествим между собой, далее, каждые p^k точек окружности β , разбивающие ее на p^k равных дуг. После этих отождествлений мы получим полиэдр, который обозначим Π_k и назовем листом степени k . Контуры a , b , получившиеся после отождествления из окружностей α , β , назовем краем, соответственно кратным краем листа Π_k .

Если K^2 — произвольная двумерная триангуляция, в одном из треугольников которой вырезана круглая дыра Σ с контуром c , и если построен лист Π_k , край a которого совпадает с контуром c , то скажем, что дыра Σ заклеена листом Π_k . Определим теперь, что мы будем понимать под (k, l) -башней. В листе Π_k вырежем дыру Σ , не пересекающуюся с краями листа, и заклеим ее листом Π_{k+1} ; в последнем вырежем дыру и заклеим листом Π_{k+2} , ..., наконец, дыру в Π_{l-1} заклеим листом Π_l . Полученный полиэдр обозначим $\Pi_{k, l}$ и назовем (k, l) -башней. Край листа Π_k , входящего в нее, назовем краем самой башни. Очевидно, $\Pi_{k, k}$ есть просто Π_k . Под вклеиванием башни $\Pi_{k, l}$ в круглую дыру Σ , вырезанную в некотором двумерном полиэдре, будем понимать построение (k, l) -башни, край которой совпадает с контуром дыры Σ .

Пусть S^2 — триангулированная двумерная сфера. Вырежем в каждом ее треугольнике по дыре и заклеим эти дыры листами Π_k . Полученный полиэдр (взятый в некоторой триангуляции) обозначим $P_{k, k}$. Пусть уже построена триангуляция $P_{k, l}$ ($l \geq k$); состоящая из „продырявленной“ сферы S^2 и вклеенных в нее и друг в друга листов степеней $k, k+1, \dots, l$. В каждом треугольнике этой триангуляции вырежем дыры. Дыры, лежащие на сфере S^2 , заклеим $(k, l+1)$ -башнями, а дыры, лежащие на листах Π_i , заклеим $(i+1, l+1)$ -башнями ($i = k, k+1, \dots, l$). Полученный после этих вклеиваний и как-то триангулированный полиэдр $P_{k, l+1}$ состоит из сферы и вклеенных в нее и друг в друга листов степеней $k, k+1, \dots, l+1$. Описанную конструкцию вклеивания можно произвести уже в K^4 и притом так, чтобы степень мелкости триангуляций $P_{k, n}$ стремилась к нулю при $n \rightarrow \infty$, а диаметры вклеиваемых башен достаточно быстро убывали. Тогда последовательность полиэдров $P_{k, n}$ будет сходиться к некоторому компакту P_k . Компакт $P = P_1$ (или любой компакт P_k , $k = 1, 2, \dots$) и будет обладать указанными в названии заметки свойствами: $\dim P = 2$, $\dim (P \times P) = 3$.

А. Внутренность листа Π_k (г. е. лист без обрзх своих краев) го-
меоморфна открытому кольцу. Поэтому можно взять все треуголь-
ники листа Π_k (как-то триангулированного) когерентно ориентирован-
ными, т. е. так, что если Π_k есть цепь, составленная из всех
треугольников листа, взятых с коэффициентом $+1$ и выбранными
ориентациями, то $\Delta\Pi_k = pa + p^kb$, где a и b — края листа. Мы будем
употреблять слово лист и символ Π_k как для обозначения самого
листа Π_k (т. е. построенного выше полиэдра), так и для обозначения
только что указанной цепи. Что именно из этих двух понятий имеет-
ся в виду, ясно каждый раз из контекста.

Возьмем какой-либо лист Π_1 из $P_{1,1}$ и рассмотрим только те части
полиэдров $P_{1,1}$, которые строятся на этом листе. Из них выбросим те
части этих полиэдров, которые строятся на некотором листе Π_2 , вкле-
енном в Π_1 , по контуру c . Беря на указанной части полиэдра $P_{1,1}$ ли-
сты Π_i с коэффициентами $\equiv p^{l-i} \pmod{p^l}$ и подходящими ориентация-
ми, получим цепь x_i^2 такую, что $\Delta x_i^2 \equiv p^{l-1} c \pmod{p^l}$. Если положить
 $z_i^1 \equiv \Delta x_i^2 \pmod{p^l}$, то $Z^1 = (z_1^1, \dots, z_l^1, \dots)$ есть степенной цикл ком-
пакта P . Этот цикл ограничивает в P и является, очевидно, суще-
ственным. Поэтому $(1) \dim P = 2$ (аналогично $\dim P_k = 2$).

Б. Скажем, что лист Π_r подчинен листу Π_s в триангуляции $P_{k,l}$,
если в этой триангуляции существует последовательность листов
 $\Pi_r, \Pi_{r+1}, \dots, \Pi_s$, последовательно вклеенных друг в друга. Возьмем ка-
кой-либо лист Π_r с коэффициентом $\equiv p^{n-1} \pmod{p^n}$ ($l \geq n \geq l-r+1$),
а все подчиненные ему листы Π_{r+i} ($i=1, 2, \dots, l-r$) с коэффици-
ентами $\equiv p^{n-i-1} \pmod{p^n}$ и с соответствующими ориентациями так,
чтобы сумма всех этих листов с выбранными коэффициентами и ори-
ентациями была циклом по модулю p^n в $P_{k,l}$. Можно исходить и не
от листа Π_r , а от сферы S^2 , взятой с коэффициентом $\equiv p^q \pmod{p^n}$
($l \geq n > q \geq l-k+1$), и точно так же уменьшать показатели степе-
ней коэффициентов при листах Π_s с увеличением их степеней. Полу-
ченные таким образом циклы назовем элементарными циклами триан-
гуляции $P_{k,l}$.

Оказывается, что всякий цикл по модулю p^n ($n \leq l$) триангуляции
 $P_{k,l}$ есть сумма элементарных циклов $\text{mod } p^n$. Всякий же цикл по
другому модулю получается из некоторого цикла по модулю p^n ($n \leq l$)
умножением и модуля и всех коэффициентов на одно и то же число.
Доказательство этих предположений не представляет труда.

В. Произведение $P_{k',l} \times P_{k'',l} = P^4$ есть комплекс многогранников.
Элементарными циклами по модулю p^n , $n \leq l$, в P^4 будем называть
циклы вида $z^4 = 'z^2 \times ''z^2$, где $'z^2$ и $''z^2$ суть элементарные циклы по мо-
дулю p^n в триангуляциях $P_{k',l}$ и $P_{k'',l}$. Тогда в P^4 имеет место то
же положение вещей, что и в $P_{k,l}$. Именно, всякий цикл по модулю
 p^n ($n \leq l$) есть сумма элементарных циклов. Всякий же цикл по дру-
гому модулю получается из некоторого цикла по модулю p^n ($n \leq l$)
умножением и модуля и всех коэффициентов на одно и то же число.
Целочисленных циклов в P^4 (как и в $P_{k,l}$) нет.

Г. Пусть P' и P'' — два экземпляра компакта P . Если $\dim(P' \times P'') = 4$,
то в $P' \times P''$ существуют (1) такие точки $\xi' \times \xi''$, что для всякой до-
статочно малой окрестности U точки $\xi' \times \xi''$ существует цикл Z^4 отно-
сительно границы B окрестности U , который лежит в U и негомоло-
гичен нулю там. ξ' и ξ'' можно выбрать так, чтобы они не лежали на
контуре ни одного треугольника ни в какой триангуляции $P'_{1,l}$
и $P''_{1,l}$. За окрестность U можно выбрать множество $U' \times U''$, где U'
есть часть компакта P' , строящаяся на некотором треугольнике Δ
триангуляции $P'_{1,l}$ для достаточно большого l (треугольник Δ берется
без границы, чтобы U' было открыто в P'), и аналогично определяет-

ся U'' . Пусть $B' = \overline{U'} - U'$, $B'' = \overline{U''} - U''$, $B = \overline{U} - U = B' \times U'' \cup U' \times B''$ и Z^4 — цикл относительно B , негомологичный нулю в U . Стянем в точку границы B' и B'' окрестностей U' и U'' . Тогда $\overline{U'}$, $\overline{U''}$ превратятся соответственно, в некоторые компакты $P_{k'}$, $P_{k''}$, множество B превратится в двумерное множество B^* , а цикл Z^4 станет циклом относительно B^* , негомологичным нулю в $P_{k'} \times P_{k''}$. Отсюда следует, что в $P_{k'} \times P_{k''}$ существует абсолютный негомологичный нулю четырехмерный цикл. Итак, чтобы доказать, что $\dim(P' \times P'') \leq 3$, нам достаточно доказать, что всякий абсолютный цикл Z^4 компакта $P_{k'} \times P_{k''}$ гомологичен нулю, т. е. что $P_{k'} \times P_{k''}$ ацикличесен в размерности 4.

Д. Пусть r настолько велико, что части компактов $P_{k'}$, $P_{k''}$, строящиеся на листах Π_n для $n \geq r$, имеют диаметры меньше ε ; положим $s = 2r$. Докажем, что при $l \geq s$ всякий цикл полиэдра $P_{k',l} \times P_{k'',l}$ гомологичен нулю в его 2ε -окрестности. Достаточно это доказать для элементарных циклов. Пусть $z^4 = 'z^2 \times ''z^2$ — элементарный цикл mod p^n в $P_{k',l} \times P_{k'',l}$. Выбросив из $'z^2$, $''z^2$ все листы, степени которых больше или равны r , мы получим цепи $'x^2$, $''x^2$, в которые все треугольники входят с коэффициентами, кратными p^{l-r} . Границы $\Delta'x^2$, $\Delta''x^2$ (по модулю p^n) состоят из контуров, по которым были вклеены листы степени r ; все эти контуры входят в $\Delta'x^2$, $\Delta''x^2$ с коэффициентами, кратными p^{l-r} . Если заклеить эти контуры кругами, взятыми с теми же коэффициентами, с которыми эти контуры входят в $\Delta'x^2$, $\Delta''x^2$, то получим циклы $'z^2$, $''z^2$, все коэффициенты которых кратны p^{l-r} . Гомологии $'z^2 \sim 'z^2$ и $''z^2 \sim ''z^2 \pmod{p^n}$ имеют место в ε -окрестности полиэдра $P_{k',l}$, соответственно $P_{k'',l}$. Таким образом, в 2ε -окрестности полиэдра $P_{k',l} \times P_{k'',l}$ имеет место гомология $z^4 = 'z^2 \times ''z^2 \sim 'z^2 \times ''z^2 \pmod{p^n}$. Но $'z^2 \times ''z^2 \equiv 0 \pmod{p^n}$, ибо все коэффициенты этого цикла кратны $p^{2(l-r)}$, а $2(l-r) \geq n$.

Е. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда существует настолько большое l_0 , что при $l \geq l_0$ всякий достаточно мелкий цикл с вершинами в $P_{k'} \times P_{k''}$ гомологичен в ε -окрестности этого компакта некоторому циклу полиэдра $P_{k',l} \times P_{k'',l}$. Беря еще $l \geq s$ (см. Д), мы получаем, что всякий достаточно мелкий цикл с вершинами в $P_{k'} \times P_{k''}$ гомологичен нулю в 3ε -окрестности этого компакта. В силу произвольности ε отсюда следует, что всякий цикл Z^4 компакта $P_{k'} \times P_{k''}$ гомологичен нулю в нем.

Ж. Из Г и Е мы имеем: $\dim(P \times P) = 3$. Но известно, что если $\dim X \geq 1$, то $\dim(X \times Y) \geq \dim Y + 1$. Отсюда и из А следует $\dim(P \times P) \geq 3$.

Резюмируя, имеем: $\dim P = 2$, $\dim(P \times P) = 3$.

Поступило
2 VI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. С. Александров, Math. Ann., 106, 161 (1932).