

О. В. ГОЛУБЕВА

**К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ЦЕПОЧЕК ВИХРЕЙ
И ВИХРЕИСТОЧНИКОВ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ**

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 II 1949)

Характерной особенностью движений в атмосфере является постоянное возникновение фронтальных поверхностей, сопровождающихся появлением цепочек вихревых возмущений, а также циклонов и антициклонов. Используя данные наблюдений, в курсах метеорологии ⁽¹⁾ указывается, что все эти возмущения можно приближенно моделировать как вихри или, еще ближе к действительности, как вихреисточники, расположенные в бесконечно тонком слое идеальной жидкости, покрывающей неподвижную сферу ⁽²⁾. Таким образом, изучение двумерных движений на поверхности сферы, вызванных системами вихрей и вихреисточников, которым посвящена настоящая работа, представляет интерес с точки зрения метеорологии.

1. Двумерное движение на неподвижной сферической поверхности можно рассматривать как частный случай пространственного течения, при котором на сферах, concentричных с данной, имеют место подобные течения. Таким образом, вихрю на поверхности сферы будет соответствовать в пространстве вихревая нить, перпендикулярная к поверхности сферы.

Из теорем Гельмгольца следует, что если жидкость идеальна, несжимаема и внешние силы имеют потенциал, то поток вихря через сферическую поверхность равен нулю. Это значит, что сумма напряжений дискретных вихрей и завихренностей всех движущихся по поверхности сферы частиц должна равняться нулю.

2. Примем в качестве координат (пользуясь географической терминологией) широту θ , которую будем считать положительной в северном и отрицательной в южном полушарии, и долготу λ , отсчитываемую от некоторого меридиана в направлении с запада на восток.

Все линейные размеры, входящие в рассматриваемые далее задачи, отнесем к радиусу сферы.

Используя стереографическую проекцию сферы на ее экваториальную плоскость (П), получим связь между полярными координатами плоскости (П) (ρ и λ_1) и координатами сферы (θ и λ) в виде:

$$\rho = \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \lambda_1 = \lambda. \quad (1)$$

Указанная стереографическая проекция представляет собой конформное преобразование поверхности сферы на плоскость (П). Можно доказать, что при конформном преобразовании поверхности на плоскость вихревая точка плоскости (П) переходит в вихревую точку

поверхности. При этом скорости соответствующих точек плоскости (П) и сферы связаны соотношением:

$$v_{\Pi} = (1 + \sin \theta) v, \quad (2)$$

где v_{Π} — скорость на плоскости (П) и v — скорость в соответствующей точке на сферической поверхности.

Кроме того, потенциальному двумерному движению на сфере будет соответствовать также потенциальное движение на плоскости (П), что является следствием конформности отображения плоскости (П) на полосу меркаторовской проекции сферы, для которой высказанное положение доказано (3).

Рассмотрим течение в плоскости (П), вызванное двумя вихрями равного напряжения, но противоположного знака, расположенными в некоторой конечной и бесконечно удаленной точках плоскости. Комплексный потенциал такого течения имеет вид:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_a), \quad (3)$$

где $z = \rho e^{i\lambda}$, z_a — точка расположения вихря. Этому течению в плоскости (П) соответствует на сфере течение, вызванное двумя вихрями равного напряжения и противоположного знака, расположенными в точке $\lambda = \lambda_a$, $\theta = 2 \operatorname{arctg} \rho_a - \frac{\pi}{2}$ и на южном полюсе сферы.

Согласно формулам (2) и (3), соответствующие скорости вдоль параллелей (v_{λ}) и вдоль меридианов (v_{θ}) запишутся в виде:

$$v_{\lambda} = \frac{\Gamma \rho}{2\pi \cos \theta} \frac{\rho - \rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)}{\rho^2 + \rho_a^2 - 2\rho\rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)}, \quad (4)$$

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma \rho}{2\pi \cos \theta} \frac{\rho_a \sin(\lambda - \lambda_a)}{\rho^2 + \rho_a^2 - 2\rho\rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)}.$$

3. Рассмотренное двумерное движение на сфере эквивалентно пространственному движению, вызванному вихревой нитью, составленной из двух полупрямых, пересекающихся в центре сферы и проходящих через точки расположения вихрей.

Представляет интерес построить движение, отвечающее одному вихрю, или, что то же самое, одной вихревой полунити, выходящей из центра сферы. В этом случае, вычислив по формуле Био-Саварра скорость, вызванную полунитью, проходящей через южный полюс, и вычитая ее из скорости, определяемой выражением (4), получим для проекций скорости, вызванных любой полунитью, выходящей из центра сферы, выражения:

$$v_{\lambda} = \frac{\Gamma \rho}{2\pi \cos \theta} \frac{\rho - \rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)}{\rho^2 + \rho_a^2 - 2\rho\rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)} - \frac{\Gamma \rho}{4\pi}, \quad (5)$$

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma \rho}{2\pi \cos \theta} \frac{\rho_a \sin(\lambda - \lambda_a)}{\rho^2 + \rho_a^2 - 2\rho\rho_a \cos(\lambda - \lambda_a)}.$$

Из формулы (5) следует, что единичный вихрь создает на поверхности сферы течение, линиями тока которого являются окружности с центром в точке расположения вихря. Скорость течения будет

убывать по мере удаления от центра вихря и в диаметрально противоположной точке обратиться в нуль.

Течение, созданное единичным вихрем, будет вихревым. Подсчитав завихренность этого движения Ω (3), получим, что она постоянна и равна

$$\Omega = -\frac{\Gamma}{4\pi}. \quad (6)$$

Поток вихря через поверхность сферы, определяемый равномерно распределенной завихренностью (6), равен $\Omega 4\pi = -\Gamma$; кроме того, точечный вихрь создает поток вихря через сферу, равный $+\Gamma$. Следовательно, суммарный поток вихря попрежнему равен нулю.

Заметим, что, заменяя в формуле (3) Γ на iQ , получим комплексный потенциал источника и стока, расположенных в точках расположения вихрей, и, соответственно, на сфере течение, созданное источником и стоком. Однако построение единичного источника на сфере, аналогичного единичному вихрю, невозможно, ибо при этом не выполняется уравнение неразрывности.

Заменяя в формуле (3) Γ на $\Gamma + iQ$, получим комплексный потенциал двух вихреисточников равной интенсивности, но разных знаков, расположенных в точках расположения вихрей, и, соответственно, на сфере течение, созданное двумя вихреисточниками.

4. Предыдущие результаты позволяют исследовать движения по сфере двух вихреисточников равной интенсивности, но разных знаков. Оказывается, что вихреисточники будут двигаться параллельно дуге большого круга, проведенного через середину расстояния (отсчитываемого по дуге большого круга) между вихреисточниками, под углом γ к этому расстоянию с постоянной скоростью v , причем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Gamma}{Q}, \quad (7)$$

$$v = \frac{\sqrt{\Gamma^2 + Q^2}}{4\pi} \operatorname{ctg} \theta_a, \quad (8)$$

где Γ — напряжение вихря, Q — мощность источника и $2\theta_a$ — расстояние между вихреисточниками, отсчитываемое по дуге большого круга, соединяющего вихреисточники.

5. Рассмотрим цепочку вихрей равного напряжения и одного знака, расположенных на равном расстоянии друг от друга по любой окружности, проведенной по сфере. Используя формулы (5), получим, что рассматриваемая вихревая цепочка все время остается на заданной окружности и вихри цепочки будут двигаться вдоль этой окружности с равными скоростями, которые определяются формулой

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{N-1}{2} \operatorname{tg} \theta_0, \quad (9)$$

где N — число вихрей цепочки и $\cos \theta_0$ является радиусом окружности на сфере, по которой расположена цепочка.

Если цепочка составлена из положительных вихрей (вращение против часовой стрелки) и $\theta_0 > 0$, то движение будет происходить слева направо.

Течение, создаваемое рассматриваемой цепочкой вихрей, обладает постоянной завихренностью, равной

$$\Omega = \frac{N\Gamma}{4\pi}. \quad (10)$$

6. Если рассматривать цепочку, расположенную на окружности, проведенной на сфере, и составленную из четного числа вихрей, находящихся на равном расстоянии друг от друга, причем два любых соседних вихря имеют разные знаки, то можно показать, что такие цепочки распадаются с течением времени, если они расположены не по окружности большого радиуса. В последнем случае эти цепочки остаются неподвижными.

Тот же результат получается и в случае аналогичной цепочки, составленной из вихреисточников.

7. Скорости потоков, создаваемых любой комбинацией расположенных на сфере вихрей или вихреисточников, определяются простой суммой выражений, аналогичных формулам (4) и (5).

Давление в жидкости подсчитывается по формуле, относящейся к течениям с постоянной завихренностью:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U + \Omega\psi = \text{const}, \quad (11)$$

где P — давление жидкости, ρ — плотность жидкости, U — потенциал внешних сил и ψ — функция тока.

Справедливость формулы (11) может быть доказана при помощи общих уравнений двумерных движений по поверхности сферы (3).

Поступило
8 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Извеков и Н. Е. Кочин, Динамическая метеорология, ч. 1, Л., 1935.
- ² Р. Э. Соловейчик, Тр. Главн. геофиз. обсерватории, в. 13, 18, Л.—М. (1937).
- ³ О. В. Голубева, ДАН, 61, № 3 (1948).