

И. И. ГОРДОН

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КОМПЛЕКСА В ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 II 1949)

Здесь дается классификация непрерывных отображений n -мерного комплекса K^n (конечного) в n -мерное действительное проективное пространство P^n .

Пусть f — непрерывное отображение K^n в P^n , Σ^n — накрывающая сфера для P^n , φ — естественное отображение (проекция) Σ^n на P^n , θ — отражение сферы Σ^n в своем центре. В случае, если каждый замкнутый путь K^n переходит в путь P^n , стягивающийся в точку, можно построить „накрывающее отображение“ $\bar{f}$ такое, что $\varphi\bar{f}(x) = f(x)$ (накрывающих отображений существует два: $\bar{f}$ и $\theta\bar{f}$). В этом случае классификация отображений K^n в P^n сводится к классификации отображений K^n в сферу Σ^n ^(1,2). Поэтому интерес представляет лишь случай, когда существуют пути, образы которых не стягиваются в точку в P^n .

Пусть Φ — фундаментальная группа K^n , реализованная фиксированным выбором начала путей; $\Phi_0(f)$ — ее подгруппа, соответствующая тем путям, образы которых стягиваются в точку. $\Phi_0(f)$ — есть подгруппа индекса 2.

Если два отображения f и g гомотопны, то они гомотопны и на остовах K^r всех размерностей $r = 0, 1, \dots, n-1$. Поэтому дадим сначала классификацию отображений K^{n-1} в P^n . Этот вопрос решается следующим предложением, доказательство которого не представляет затруднений.

Теорема 1. *Два отображения f и g комплекса K^n в P^n гомотопны на K^{n-1} в том и только в том случае, когда соответствующие им подгруппы $\Phi_0(f)$ и $\Phi_0(g)$ совпадают. Какова бы ни была подгруппа Φ_0 индекса 2 фундаментальной группы Φ , существует отображение $f: K^n \rightarrow P^n$ такое, что $\Phi_0(f)$ совпадает с Φ_0 .*

Мы предполагаем теперь, что подгруппа Φ_0 фиксирована, и в дальнейшем будем рассматривать лишь такие отображения, которые определяют эту фиксированную подгруппу Φ_0 .

Пусть L^n — двулистный накрывающий комплекс для K^n , определяемый подгруппой Φ_0 , ψ — естественное отображение („проекция“) L^n на K^n . Отображению $f: K^n \rightarrow P^n$ соответствуют два „накрывающих отображения“ L^n в P^n . Именно, $\bar{f}$ является накрывающим отображением L^n в P^n , если для любой точки $x \in L^n$ $f\psi(x) = \varphi\bar{f}(x)$. Очевидно, $\theta\bar{f}$ тоже есть накрывающее отображение. Существование — причем в точности двух — накрывающих отображений доказывается без труда.

Будем называть противоположащими точками (симплексами) L^n такие две точки (симплекса), которые накрывают одну и ту же точку (симплекс) K^n . Будем называть отображения L^n в Σ^n , переводящие каждые две противоположащие точки L^n в диаметрально противоположные точки Σ^n , специальными отображениями. Легко видеть, что накрывающие отображения для f являются специальными.

Два специальных отображения $\bar{f}_0$ и $\bar{f}_1$ мы будем называть специально-гомотопными, если существует деформация $\bar{f}_t$, их соединяющая, причем при любом t , $0 \leq t \leq 1$, $\bar{f}_t$ является специальным отображением.

Легко видеть, что два отображения f и g комплекса K^n в P^n гомотопны в том и только в том случае, когда g специально-гомотопно $\bar{f}$ или $\theta\bar{f}$. Так как при n нечетном θ может быть реализовано вращением сферы Σ^n , то $\bar{f}$ и $\theta\bar{f}$ специально-гомотопны, т. е. при n нечетном f и g гомотопны в том и только в том случае, когда $\bar{f}$ и $\bar{g}$ специально-гомотопны.

Мы будем впредь считать, что все рассматриваемые отображения просто совпадают на K^{n-1} . Пусть P^{n-1} есть $(n-1)$ -мерное проективное пространство, вложенное в P^n и представляющее совокупность тех отношений $(\xi_1 : \xi_2 : \dots : \xi_n : \xi_{n+1})$, для которых $\xi_{n+1} = 0$. Будем считать, что P^{n-1} накрывается экватором Σ^{n-1} сферы Σ^n . Без ограничения общности можно считать, что все рассматриваемые нами отображения отображают K^{n-1} в P^{n-1} . Накрывающие отображения переводят тогда L^{n-1} в Σ^{n-1} .

Введем понятие специальных ∇ -цепей, ∇ -циклов, ∇ -гомологий комплекса L^n . Будем считать, что K^n задан в определенном симплициальном разбиении и что его r -мерные симплексы суть $\tau_1^r, \tau_2^r, \dots, \tau_{\alpha^r}^r$.

Для каждого симплекса τ_i^r существуют два „накрывающих“ симплекса T_i^r и $T_i'^r$ комплекса L^n . Мы будем считать, что симплексы τ_i^r ориентированы (произвольно, но фиксировано). На симплексы T_i^r и $T_i'^r$ переносим ориентацию симплекса τ_i^r . ∇ -цепь u^r комплекса L^n мы будем называть специальной цепью, если: 1) при n нечетном $u^r(T_i^r) = u^r(T_i'^r)$ (для всех i); 2) при n четном $u^r(T_i^r) = -u^r(T_i'^r)$ (для всех i).

Очевидно, можно говорить о специальных ∇ -циклах, ∇ -гомологиях и группах специальных ∇ -гомологий. Так например, два специальных ∇ -цикла u^r и v^r специально-гомологичны нулю, если их разность есть граница специальной $(r-1)$ -мерной цепи a^{r-1} . Мы будем это записывать $u^r \sim v^r$.

При n нечетном можно установить взаимно-однозначное соответствие между специальными ∇ -цепями комплекса L^n и обычными ∇ -цепями комплекса K^n , полагая $u_o^r(\tau_i^r) = u^r(T_i^r) = u^r(T_i'^r)$. Отсюда сразу следует, что при n нечетном все группы специальных ∇ -гомологий L^n изоморфны соответствующим группам ∇ -гомологий K^n .

При решении вопроса о классификации отображений основную роль будет играть n -мерная группа специальных ∇ -гомологий L^n . Мы будем обозначать ее G .

Возьмем какое-нибудь отражение h K^n в P^n , совпадающее на остоле K^{n-1} с каждым из рассматриваемых нами отображений. Пусть h — одно из двух его накрывающих отображений. Под $\bar{f}$, $\bar{g}$ и т. д. мы в дальнейшем будем понимать то из двух накрывающих отображений для f , g и т. д., которое совпадает с $\bar{h}$ на остоле L^{n-1} . $\bar{f}$ и $\bar{h}$ вместе определяют n -мерный специальный ∇ -цикл $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n$. Именно, если T^n есть какой-нибудь ориентированный симплекс из L^n , мы определяем $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n(T^n)$ как степень отображения в Σ^n n -мерной сферы,

склеенной из двух экземпляров T^n , при котором один экземпляр отображается посредством $\bar{f}$, а другой, взятый со знаком минус, посредством $\bar{h}$. Из特殊性 отображений $\bar{f}$ и $\bar{h}$ следует, что $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n$ есть специальный ∇ -цикл.

В случае n нечетного вопрос о классификации решается следующей теоремой.

Теорема 2. Два отображения f и g комплекса K^n в P^n при n нечетном гомотопны в том и только в том случае, когда $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n \stackrel{\text{сп}}{\sim} u_{\bar{h}, \bar{g}}^n$. Если U есть произвольный класс специальных n -мерных ∇ -гомологий и u^n — какой-нибудь цикл из этого класса, то существует отображение f такое, что $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n = u^n$.

Таким образом, теорема 2 устанавливает, что в случае n нечетного классы отображений K^n в P^n могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с элементами группы $\Gamma = B_{\nabla}^n(K^n)$ путем выбора произвольного отображения h .

Если n четно, то из гомотопности h и f следует, что $\bar{f}$ специально-гомотопно либо $\bar{h}$, либо $\theta\bar{h} = \bar{h}^*$. $\bar{h}^*$ не совпадает с $\bar{h}$ на L^{n-1} . Пусть θ' есть вращение сферы Σ^n , оставляющее полюса неподвижными и переводящее каждую точку экватора Σ^{n-1} в диаметрально противоположную. Тогда $\theta'\bar{h}^* = \bar{h}'$ совпадает с $\bar{h}$ на L^{n-1} и тоже есть специальное отображение. Под $\bar{f}'$, $\bar{g}'$ мы понимаем аналогичные отображения для f , g .

Очевидно, f гомотопна h в том и только в том случае, когда $\bar{f}$ специально-гомотопна либо $\bar{h}$ либо $\bar{h}'$. Поэтому вопрос о классификации отображений в случае n четного решается следующей теоремой (мы опять фиксируем h).

Теорема 3. Два отображения f и g комплекса K^n в P^n при n четном гомотопны в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$u_{\bar{h}, \bar{g}}^n \stackrel{\text{сп}}{\sim} u_{\bar{h}, \bar{f}}^n \quad \text{или} \quad u_{\bar{h}, \bar{g}}^n \stackrel{\text{сп}}{\sim} -u_{\bar{h}, \bar{f}}^n + u_{\bar{h}, \bar{h}'}^n.$$

Если U есть произвольный класс n -мерных специальных ∇ -гомологий комплекса L^n , а u^n — какой-нибудь цикл этого класса, то существует отображение f такое, что $u_{\bar{h}, \bar{f}}^n = u^n$.

В связи с теоремой 3 интересно исследовать группу Γ в случае n четного. Очевидно, группа Γ полностью определяется комплексом K^n и подгруппой Φ_0 фундаментальной группы. Легко видеть, что Γ есть фактор-группа группы $B_{\nabla}^n(L^n)$.

В самом деле, если γ^n есть обычная ∇ -цепь накрывающего L^n , то, полагая $u^n(T_i^n) = \gamma(T_i^n) - \gamma(T_i'^n)$ и $u^n(T_i'^n) = \gamma(T_i'^n) - \gamma(T_i^n)$, мы получаем специальную n -мерную цепь u^n .

Установленное соответствие между обычными и специальными ∇ -цепями индуцирует, как нетрудно проверить, гомоморфное отображение группы $B_{\nabla}^n(L^n)$ на группу Γ .

Вычисление группы Γ не представляет труда, если известна матрица инциденций комплекса L^n и разбиение симплексов накрытия на пары T и T' . Пусть граница симплекса T_i^n (T_i^k — один из двух симплексов, накрывающих симплекс τ_i^k комплекса K^n ; другой из них $T_i'^k$) содержит симплекс T_j^{n-1} с коэффициентом a_{ij} и симплекс $T_j'^{n-1}$ с коэффициентом b_{ij} ($i = 1, 2, \dots, \alpha^n$; $j = 1, 2, \dots, \alpha^{n-1}$, где α^k есть число k -мерных симплексов комплекса K^n). Тогда вычисление группы Γ сводится к приведению к диагональному виду матрицы

$C = (a_{ij} - b_{ij})$. Именно, ранг группы Γ равен $\alpha^n - r$, где r ранг C , а коэффициенты кручения Γ совпадают с элементарными делителями матрицы C , отличными от 1.

В случае, когда K^n есть многообразие, группу Γ удастся вычислить полностью. При n четном здесь получается следующая

Теорема 4. *Если K^n есть ориентируемое многообразие, группа Γ содержит два элемента. Точно так же, она содержит два элемента, если и K^n и накрытие L^n оба неориентируемы.*

Если же K^n неориентируемо, а L^n ориентируемо, Γ представляет бесконечную циклическую группу.

С помощью теорем 2, 3, 4 можно расклассифицировать отображения n -мерных многообразий в P^n . Ограничимся формулировкой результатов в наиболее интересном случае, когда Φ_0 не совпадает с Φ , т. е. является подгруппой индекса 2. Мы предполагаем, что все рассматриваемые отображения определяют один и тот же гомотопический класс отображений остова K^{n-1} . В случае, когда K^n есть многообразие, а L^n — ориентируемое многообразие, цикл $u_{\bar{n}, \bar{n}}$ может быть полностью вычислен, и мы получаем следующие результаты.

Теорема 5. 1) *При n нечетном гомотопический класс отображений ориентируемого многообразия K^n в P^n определяется степенью отображения, причем соответствие взаимно-однозначное. Если K^n неориентируемое многообразие, существует два класса отображений.*

2) *При n четном, если K^n есть ориентируемое многообразие, существует два класса отображений. Если K^n есть неориентируемое многообразие, а его накрытие L^n ориентируемо, гомотопический класс отображения определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения, причем соответствие взаимно-однозначное.*

Из теоремы 5, как частный случай, получаются основные результаты Борсука ⁽³⁾.

Случай, когда K^n и L^n оба неориентируемы, при n четном остается неразобраным. Из теоремы 4 следует только, что в этом случае имеется не более двух классов отображений.

Задача о классификации отображений комплекса в проективное пространство была предложена мне Л. С. Понтрягиным, которому приношу свою искреннюю благодарность.

Горьковский государственный
университет

Поступило
7 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Hopf, Comm. Math. Helv., 5, 39 (1932). ² H. Whitney, Duke Math. J., 3, 51 (1937). ³ K. Borsuk, Fund. Math., 20, 177 (1933).