Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Е. БИРМАН

К ЗАДАЧАМ О ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 13 VII 1948)

Настоящая статья касается исследования напряженного и деформированного состояний призматических стержней, составленных из полос, толщина которых мала по сравнению с их шириной. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении трубчатого стержня квадратного сечения, скручиваемого усилиями, действующими вдоль ребер стержня так, что каждая грань загружена обратно-симметрично нормальными напряжениями $f(x)$ (рис. 1).

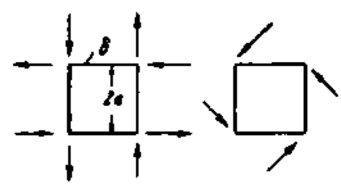

Рис. 1.

Вследствие тонкостенности стержня можно считать *, что каждая грань в отдельности находится в условиях плоского напряженного состояния и что взаимодействие между ними осуществляется только касательными напряжениями. Разрезав стержень вдоль ребер на четыре отдельных полосы, загружаем каждую полосу обратно-симметрично нормальными напряжениями $f(x)$ и касательными $\gamma(x)$. Деформации кромок граней $\frac{\partial u}{\partial x}$, в силу неразрывности, должны совпадать по обе стороны разреза **. Применяя решение, данное в нашей предыдущей статье (1) (обозначения те же), это условие можно выразить следующим интегральным уравнением:

$$2k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}^2 a\xi\, d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi-2a\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(t)\,\sin\xi(t-x)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(k-1)\operatorname{sh} 2a\xi+2a\xi]\,d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi-2a\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\xi(t-x)\,dt=0,$$

откуда

$$\gamma(x)=\frac{1}{2k\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(k-1)\operatorname{cth} a\xi+\frac{a\xi}{\operatorname{sh}^2 a\xi}\right]d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\xi(t-x)\,dt.$$

---

* Исключив из рассмотрения местные напряжения в углах профиля.

** В данном случае вдоль ребер $\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Затем в соответствии с загружением, находим для каждой грани:

$$\Phi(z)=\frac{i}{2k\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{\operatorname{sh}a\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\xi(t-z)\,dt,$$

$$\Psi'(z)=\frac{i}{2ak\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(k-1)\operatorname{sh}a\xi+a\xi\operatorname{ch}a\xi]\,d\xi}{\operatorname{sh}^2 a\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\xi(t-z)\,dt.$$

Рассмотрим пример. Пусть $f(x)$ представляет нагрузку, изображенную на рис. 2. Тогда:

$$\Phi(z)=\frac{ip}{k\pi}\left[\ln\frac{\operatorname{ch}m(c-z)}{\operatorname{ch}m(b-z)}+\ln\frac{\operatorname{ch}m(c+z)}{\operatorname{ch}m(b+z)}\right],$$

$$\Psi'(z)=\frac{ip(k-1)}{ak\pi}\left[\ln\frac{\operatorname{ch}m(c-z)}{\operatorname{ch}m(b-z)}+\ln\frac{\operatorname{ch}m(c+z)}{\operatorname{ch}m(b+z)}\right]+$$
$$+\frac{imp}{ak\pi}[(c-z)\operatorname{th}m(c-z)-(b-z)\operatorname{th}m(b-z)+(c+z)\operatorname{th}m(c+z)-$$
$$-(b+z)\operatorname{th}m(b+z)];$$

$$Y_y=\frac{p}{\pi}[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(c-x)\operatorname{tg}my)-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(b-x)\operatorname{tg}my)-$$
$$-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(c+x)\operatorname{tg}my)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(b+x)\operatorname{tg}my)]+$$
$$+\frac{p\sin 2my}{2ak}\left[\frac{c-x}{\operatorname{ch}2m(c-x)+\cos 2my}-\frac{b-x}{\operatorname{ch}2m(b-x)+\cos 2my}-\right.$$
$$\left.-\frac{c+x}{\operatorname{ch}2m(c+x)+\cos 2my}+\frac{b+x}{\operatorname{ch}2m(b+x)+\cos 2my}\right],$$

$$X_x=\frac{p(2-k)}{k\pi}[\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(c-x)\operatorname{tg}my)-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(b-x)\operatorname{tg}my)-$$
$$-\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(c+x)\operatorname{tg}my)+\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th}m(b+x)\operatorname{tg}my-$$
$$-\frac{p\sin 2my}{2ak}\left[\frac{c-x}{\operatorname{ch}2m(c-x)+\cos 2my}-\frac{b-x}{\operatorname{ch}2m(b-x)+\cos 2my}-\right.$$
$$\left.-\frac{c+x}{\operatorname{ch}2m(c+x)+\cos 2my}-\frac{b+x}{\operatorname{ch}2m(b+x)+\cos 2my}\right],$$

$$X_y=\frac{p(k-1)}{2k\pi}\left[\ln\frac{\operatorname{ch}2m(c-x)+\cos 2my}{\operatorname{ch}2m(b-x)+\cos 2my}+\ln\frac{\operatorname{ch}2m(c+x)+\cos 2my}{\operatorname{ch}2m(b+x)+\cos 2my}\right]+$$
$$+\frac{p}{2ak}\left[\frac{(c-x)\operatorname{sh}2m(c-x)}{\operatorname{ch}2m(c-x)+\cos 2my}-\frac{(b-x)\operatorname{sh}2m(b-x)}{\operatorname{ch}2m(b-x)+\cos 2my}+\right.$$
$$\left.+\frac{(c+x)\operatorname{sh}2m(c+x)}{\operatorname{ch}2m(c+x)+\cos 2my}-\frac{(b+x)\operatorname{sh}2m(b+x)}{\operatorname{ch}2m(b+x)+\cos 2my}\right]\quad\left(m=\frac{\pi}{2a}\right).$$

Так же просто определяются и перемещения. Например, в частном случае, когда кручение осуществляется сосредоточенными силами ($c \to b$), на осях граней ($y = 0$) имеем:

$$2\mu v = -\frac{P}{k\pi}\left[(2k-1)\ln\frac{\operatorname{ch} m(b-x)}{\operatorname{ch} m(b+x)} + \right.$$

$$\left. + m(b-x)\operatorname{th} m(b-x) - m(b+x)\operatorname{th} m(b+x)\right].$$

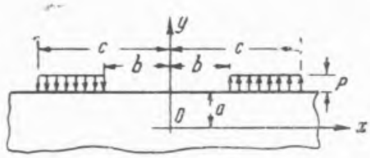

Рис. 2

Отсюда, при $x \to \infty$ получим $v_{(\infty)} = \frac{Pb}{\mu a}$.

Если же удалить крутящие моменты в бесконечность ($b \to \infty$), то найдем: $Y_y = X_x = 0$, $X_y = \frac{P}{a}$, $v = \frac{Px}{\mu a}$.

Подобные задачи решаются таким же путем и в алгебраических полиномах.

Опуская выкладки, приводим решение для стержня двухтаврового сечения, закрепленного одним концом и загруженного поверху вдоль кромки стенки нормальными напряжениями $-px$ *. Ширина полки $2b$, толщина δ_b; высота стенки $2a$, толщина $2\delta_a$.

Напряжения в полках ($0 \leqslant y \leqslant b$) **:

$$Y_y = \pm\frac{3px}{4a^2}(1-\alpha_1)(b-y)^2,$$

$$X_x = \pm\frac{px}{4a^2}(1-\alpha_1)[x^2 - 6y^2 + 6by(2+\sigma) - b^2(4+3\sigma) + 4a^2\beta] +$$

$$+\frac{p}{2}(1-\alpha_2)\sigma x,$$

$$X_y = \pm\frac{p(b-y)}{4a^2}(1-\alpha_1)[3x^2 - 2y^2 + by(4+3\sigma) + 4a^2\beta] +$$

$$+\frac{p\sigma}{2}(1-\alpha_2)(b-y)^{***}.$$

Напряжения в стенке ($-a \leqslant y \leqslant a$):

$$Y_y = -\frac{pxy}{4a}\left[2 + (1-\alpha_1)\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\right] - \frac{px}{2},$$

---

* Здесь требуется, чтобы $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ на внутренних кромках полуполок в силу симметрии и чтобы $\frac{\partial u}{\partial x}$ совпадало на линиях контакта стенок с полками.

** Прямая $y = 0$ ось полки.

*** Знаки соответственно для верхней и нижней полок.

$$X_x = \frac{pxy}{2a}\left[(1-\alpha_1)\left(\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{3}{5}\right) - 2\alpha_1\beta\right] - \frac{p}{2}\alpha_2\sigma x,$$

$$X_y = \frac{p}{2}\left\{\frac{\alpha_1 x^2}{2a} + (1-\alpha_1)\left[\frac{3x^2}{4a}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{2a}\left(\frac{3}{5} - \frac{y^2}{2a^2}\right) + \frac{a}{20}\right] + \right.$$
$$\left. + a\alpha_1\beta\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{1}{3}\right)\right\} + \frac{p}{2}\alpha_2\sigma y,$$

где:

$$\alpha_1 = \frac{3}{3+\varepsilon}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{a\delta_a}{b\delta_b},$$

$$\beta = (1-\alpha_1)\left[\frac{b^2}{a^2}\left(1 + \frac{3}{2}\sigma\right) - \frac{1}{5}\right] + \frac{\sigma}{2}.$$

Последовательным дифференцированием этого решения по x получим новые решения: изгиб стержня равномерно распределенной нагрузкой, изгиб сосредоточенной силой на конце и чистый изгиб стержня.

Поступило
10 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 2 (1948).