

Ю. И. НЕЙМАРК

СТРУКТУРА D -РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА КВАЗИПОЛИНОМОВ И ДИАГРАММЫ ВЫШНЕГРАДСКОГО И НАЙКВИСТА

(Представлено академиком А. А. Андроновым 26 IV 1948)

1. В настоящей заметке рассматривается структура разбиения пространства параметров a_{ks} , τ_j (a_{ks} — комплексные числа и τ_j — действительные числа, причем $\tau_m > \tau_{m-1} > \dots > \tau_1 > \tau_0 = 0$) квазиполинома

$$\sum_{k, s=0}^{n, m} a_{ks} z^k e^{\tau_s z} \quad (1)$$

на множества квазиполиномов с разным числом корней на правой полуплоскости z и обобщаются результаты (в частности, способ нахождения области устойчивости по любой паре действительных параметров, входящих в уравнение (1)) предыдущей заметки автора ⁽⁵⁾, касающейся полиномов.

Так как задача исследования устойчивости линейных распределенных систем в ряде важных случаев сводится к исследованию корней квазиполиномов, то структура разбиения пространства квазиполиномов на множества квазиполиномов с различным числом корней на правой полуплоскости, прежде всего качественные и количественные характеристики множества квазиполиномов, все корни которых имеют отрицательные действительные части, имеют существенный прикладной интерес *.

2. Пусть $R_{2n,m}$ — пространство параметров $a_{k,s}$, τ_j квазиполинома (1), которое мы будем называть пространством квазиполиномов, и пусть $D(s)$ — множество квазиполиномов этого пространства, имеющих s корней с положительной действительной частью. Разбиение пространства $R_{2n,m}$ на множества $D(0)$, $D(1)$, ..., $D(\infty)$ назовем его D -разбиением. При непрерывном изменении параметров $a_{k,s}$, τ_j число корней справа от мнимой оси квазиполинома (1) может измениться либо за счет перехода некоторых его корней через мнимую ось, либо за счет рождения или исчезновения некоторых его корней в существенно особой точке $z = \infty$.

* К рассматриваемой проблеме имеют отношение следующие группы работы: 1) Ряд математических работ, связанных с изучением некоторого класса действительных мероморфных функций и степенной проблемой моментов ⁽¹⁾. 2) Ряд математических работ, возникших в связи со стремлением найти эффективное решение проблемы Эрмита—Гурвица и Раута — Гурвица для квазиполиномов ⁽²⁾. 3) Ряд работ прикладного содержания, начинающихся известной работой Найквиста 1932 г. и фактически изучающих некоторые частные классы сечений пространства квазиполиномов, а также ряд прикладных работ, где исследование расположения корней квазиполиномов проводится путем использования теоремы Коши ⁽³⁾.

Первая возможность может иметь место лишь при переходе через квазиполином, допускающий чисто мнимый корень, вторая наверняка не будет иметь места, если мы перемещаемся в пространстве $R_{2n,m}$ вне множества S_p квазиполиномов, имеющих хотя один корень в сколь угодно малой, но фиксированной правой полукрестности $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| > p$ точки $z = \infty$, для чего достаточно, чтобы перемещение происходило вне множества $T_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{S}_p$, где $\bar{S}_p$ — замыкание множества S_p .

3. В основе нового решения проблемы Раута — Гурвица и Эрмита — Гурвица для полиномов, а также приемов построения диаграмм Вышнеградского и Найквиста*, изложенных в предыдущих заметках автора, лежало рассмотрение непрерывных переходов от одних полиномов к другим, при которых знание, к какой области D или какого типа границе принадлежит один полином, позволяет узнать это же о другом полиноме.

Эти соображения в случае квазиполиномов, в частности, применимы к D -разбиению области G , если оно удовлетворяет условиям: а) граница D -разбиения области G состоит из точек кривой, соответствующей квазиполиномам, допускающим по крайней мере один чисто мнимый корень; б) любые две точки области G можно соединить путем, лежащим целиком в G и пересекающим эту кривую в точках, сумма кратностей которых конечна.

4. Рассмотрим D -разбиение w -плоскости квазиполиномов $f + wg$. Целые функции этой плоскости, имеющие по крайней мере один чисто мнимый корень, образуют кривую N , представляющую отображение мнимой оси плоскости z на w -плоскость преобразованием $w = w(z) = -f(z)g^{-1}(z)$.

Пусть N_∞ — множество предельных точек кривой N (точка w_0 предельная для кривой N , если существует стремящаяся к точке $z = \infty$ последовательность точек мнимой оси, для которых соответствующие точки w стремятся к точке w_0). Очевидно, что N_∞ состоит не более чем из двух компонент и разбивает w -плоскость на области $\pi_1, \pi_2, \dots$, среди которых не более одной двухсвязной, а остальные односвязные.

При непрерывном изменении w переход из одного множества D в другое возможен либо через пересечение кривой N , либо через появление или исчезновение корня в точке $z = \infty$. При непрерывных перемещениях в любой из областей π_j после нанесения штриховки на левой стороне кривой N^{**} можно считать числа корней, перешедших через мнимую ось с левой полуплоскости на правую и с правой на левую. Отрождение же корня в точке $z = \infty$ в этом случае, как это непосредственно следует из теоремы Иверсена⁽⁶⁾, может иметь место не более чем для одной точки плоскости w , либо, в противном случае, вся плоскость w , за исключением не более двух точек, принадлежит множеству $D(\infty)$.

Поэтому, в частности, каждая из областей π_j либо целиком заполнена точками множеств типа $D(s < \infty)$, и тогда при непрерывном изменении w в ней не может происходить рождения или исчезновения корней в правой полукрестности точки $z = \infty$, либо все ее точки, кроме самое большее двух, принадлежат множеству $D(\infty)$.

* Согласно с ранее принятой терминологией, будем называть D -разбиение w -плоскости квазиполиномов $f + wg$, где w — комплексный параметр и f и g — действительные квазиполиномы, диаграммой Найквиста. D -разбиение v, μ -плоскости действительных квазиполиномов $\nu f + \mu g + h$, где ν, μ — действительные параметры и f, g и h — действительные квазиполиномы, — диаграммой Вышнеградского.

** Смысл штриховки и правила нанесения ее на сторонах граничной кривой остаются такими же, как и для полиномов (см. (5)).

5. Теорема. Для выполнения условий а) и б) достаточно, чтобы для точек области G выполнялось неравенство

$$|a_{nm}| - |a_{n, m-1}| - \dots - |a_{n0}| > 0, \quad (A)$$

являющееся в то же время необходимым и достаточным условием грубости* и принадлежности квазиполинома (1) множеству $D(s < \infty)$.

Действительно, рассмотрим D -разбиение w -плоскости квазиполиномов

$$A_m(z) e^{\bar{\tau}_m z} + \dots + A_1(z) e^{\bar{\tau}_1 z} + w A_0(z). \quad (2)$$

Параметрическое уравнение граничной кривой N есть

$$w = - \{ A_m A_0^{-1} e^{\bar{\tau}_m z} + \dots + A_1 A_0^{-1} e^{\bar{\tau}_1 z} \}_{z=i\omega}.$$

Из него непосредственно следует, что N_ω при соизмеримых τ_j — уникальная алгебраическая кривая, а при несоизмеримых и таких, что для любых целых чисел $p_m, p_{m-1}, \dots, p_1$

$$p_m \tau_m + p_{m-1} \tau_{m-1} + \dots + p_1 \tau_1 \neq 0, \quad (B)$$

N_ω — кольцо

$$|a_{n0}|^{-1} \sum [a_{nj}| \geq w \geq |a_{n0}|^{-1} [|a_{ns}| - \sum' |a_{nj}|], \quad (C)$$

где $|a_{ns}| \geq |a_{nj}|$ для $j=1, 2, \dots, m$.

Нахождение множества $D(\infty)$ в этом случае не представляет труда и дает, что $\bar{D}(\infty)$ — часть плоскости w , удовлетворяющая условию

$$|w| \geq R = \{|a_{nm}| - |a_{nm-1}| - \dots - |a_{n1}|\} |a_{n0}|^{-1}.$$

Возьмем сечение вида (2), для которого, возможно, и не выполняется условие (B). Точка w , для которой $|w| > R$, может и не принадлежать $D(\infty)$, но если она принадлежит $D(s < \infty)$, то она заведомо негрубая по отношению к параметрам τ_j .

С другой стороны, точки, для которых $|w| < R$, принадлежат областям типа $D(s < \infty)$ и грубы по всем параметрам a_{ks}, τ_j , поскольку R и любая конечная часть кривой N зависят от них непрерывно и для любого положительного ε существуют такие δ и Ω , что при изменении a_{ks} и τ_j по модулю меньше, чем на δ , при $|\omega| > \Omega$ имеет место $|w(i\omega)| > R - \varepsilon$.

6. Для полного построения D -разбиения части w -или μ, ν -плоскости, удовлетворяющей условию (A), осталось только нанести на сторонах границы штриховку по общим правилам, изложенным в предыдущей заметке⁽⁵⁾, и указать, в какой области или к какого типа границе принадлежит какая-нибудь ее точка. Способ отыскания такой точки определяется конкретной задачей. В общем случае задачу можно решить, например, так: для того чтобы узнать, к какой области D принадлежит квазиполином $A_m e^{\bar{\tau}_m z} + \dots + A_0$, строим D -разбиение w -плоскости $A_m e^{\bar{\tau}_m z} + w \{A_{m-1} e^{\bar{\tau}_{m-1} z} + \dots + A_0\}$, замечая, что точке $w=0$ соответствует квазиполином $A_m e^{\bar{\tau}_m z}$, имеющий столько же корней справа от мнимой оси, сколько и полином A_m .

* Пусть $f(z; a_1, \dots, a_n)$ целая функция от z , зависящая непрерывно от параметров a_j . Мы скажем, что она параметрически груба при $a_j = a_j^0$ по отношению к параметрам a_j , если при достаточно малых их изменениях у нее не меняется число корней с положительной действительной частью (см. аналогично⁽⁴⁾).

Пример 1. D -разбиение (диаграмма Вышнеградского) ν, μ -плоскости квазиполиномов

$$(2z + 1)e^{\tau z} + \nu z e^{\tau_1 z} + \mu(z - 1) \quad \left(\tau_2 \approx \frac{\pi}{18}, \tau_1 \approx \frac{7\pi}{180} \right).$$

Граница D -разбиения состоит из кривой $N: \nu = \Delta_\nu \Delta^{-1}, \mu = \Delta_\mu \Delta^{-1}$, где $\Delta_\nu = (2\omega^2 - 1) \sin \tau_2 \omega - \cos \tau_2 \omega$, $\Delta_\mu = \omega \cos (\tau_2 - \tau_1) \omega - 2\omega^2 \sin (\tau_2 - \tau_1) \omega$, $\Delta = \omega (\cos \tau_1 \omega - \omega \sin \tau_1 \omega)$,

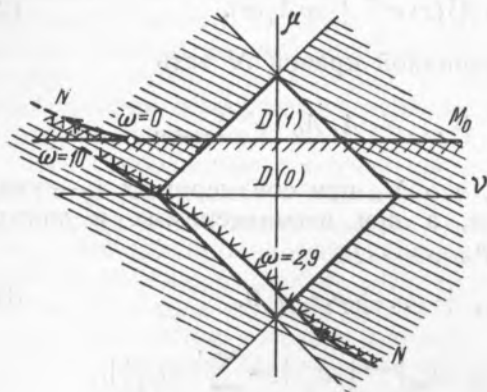


Рис. 1

соответствующей наличию пары чисто мнимых сопряженных корней, и прямой $\mu = 1$, соответствующей наличию нулевого корня. При выполнении условия (В) кривая N заполняет всюду плотно область, заштрихованную на рис. 1. Условие (А) дает $|z| - |\nu| - |\mu| > 0$. Точка $\nu = \mu = 0$ принадлежит $D(0)$. На рис. 1 дано D -разбиение области $|z| - |\nu| - |\mu| > 10^{-2}$, поскольку кривая N построена лишь для $|\omega| \leq 10$.

Пример 2. D -разбиение τ, ν -плоскости квазиполиномов $P(z) + \nu Q(z)e^{\tau z}$, где P и Q — действительные полиномы и $\tau \geq 0$. Граница состоит из прямой $P(0) + \nu Q(0) = 0$ и кривой N с параметрическим уравнением

$$\tau = \frac{1}{\omega} \left\{ \arg \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \right\}, \nu = \pm |P(i\omega)/Q(i\omega)|,$$

причем $\text{sign } \Delta = \text{sign } (-\omega\nu)$.

Условие (А) дает $|\nu| \geq \lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)Q^{-1}(z)| = R$. Точкам $|\nu| > R, \tau = 0$ соответствуют полиномы $P + \nu Q$.

Горьковский государственный университет

Поступило
12 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Stieltjes, Ann. de Toulouse, 8—9 (1894—95); J. Grommer, J. reine u. angew. Math., 144, 114 (1914); Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938; Н. Чеботарев, Math. Ann., 99, 660 (1928). ² Н. Г. Чеботарев, ДАН, 33, № 9 (1941); 34, 3 (1942); 35, 219, 251 (1942); Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. математ., 6, 115 (1942); Н. Н. Мейман, ДАН, 40, №№ 2 и 5 (1943); Б. Я. Левин, ДАН, 41, № 2—3 (1942). ³ Н. Nyquist, The Bell System Techn. J., 11, 126 (1932); Evelyn, ibid., 12, 111 (1933); A. Callender, P. Hartru and A. Porter, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 235, 415 (1936); F. Reinhardt, Wiss. Veröff. aus dem Sim.-Wer., 18, 24 (1939); А. Андронов и А. Майер, Автоматика и телемеханика, 7, 95 (1947); Я. З. Цыпкин, там же, 7, 107 (1947); А. А. Соколов, Инженерный сб., 11, М., (1946); И. П. Кабаков, там же; Н. Волошин, Автоматика и телемеханика, № 4 (1948). ⁴ А. Андронов и Л. Понтрягин, ДАН, 14, 247 (1937). ⁵ Ю. Неймарк, ДАН, 58, 357 (1947); 59, 853 (1948). ⁶ G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes, Paris, 1924.