

МАТЕМАТИКА

Г. В. БУШМАНОВА и А. П. НОРДЕН

**ПРОЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ НОРМАЛИЗОВАННОЙ
ПОВЕРХНОСТИ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IV 1948)

Предположим, что нормализованная поверхность трехмерного проективного пространства задана точечным уравнением

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i), \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

или тангенциальным уравнением

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(u^i), \quad (2)$$

а ее нормаль первого рода определена пересечением плоскостей

$$\eta_{\alpha i} = \partial_i \xi_\alpha - \lambda_i \xi_\alpha, \quad (3)$$

и ее нормаль второго рода соединяет точки

$$y_i^\alpha = \partial_i x^\alpha - l_i x^\alpha. \quad (4)$$

В таком случае коэффициенты ее внутренних связностей первого и второго рода связаны соотношением

$$s_{ij}^* \Gamma_{ij}^* - O_{ij}^* = \tilde{b}^{im} \nabla_k b_{jm} - \omega_k \delta_j^i \quad (5)$$

((1), § 3), где b_{ij} — тензор асимптотической сети, $\tilde{b}^{ij}$ — взаимный ему тензор, дифференцирование происходит с помощью коэффициентов связности первого рода, тензор

$$\omega_k = \tilde{b}^{im} \nabla_k b_{im} - 4 T_i, \quad (6)$$

а тензор

$$T_i = \frac{1}{2} \tilde{b}^{mn} \left(\nabla_m b_{ni} - \frac{1}{2} \nabla_i b_{mn} \right) \quad (7)$$

((1), § 5) чебышевский тензор первого рода асимптотической сети ((2).

Всякая прямая, проходящая точку поверхности, но не лежащая в ее касательной плоскости, может быть определена пересечением плоскостей

$$\zeta_{\alpha i} = \eta_{\alpha i} + \tau_i \xi_\alpha, \quad (8)$$

а прямая, сопряженная ей полярно относительно соприкасающейся поверхности L_{ii} , соединяет точки

$$z_i^\alpha = y_i^\alpha + (\tau_i + T_i)$$

((1), § 8, 13).

Вводя связность с коэффициентами

$$z_{ij}^k = \frac{1}{2} (G_{ij}^k + \Gamma_{ij}^k), \quad (9)$$

мы будем иметь:

$$\overset{0}{\nabla}_k b_{ij} = \partial_k b_{ij} - z_{ik}^s b_{js} - z_{jk}^s b_{is} = \omega_k b_{ij} \quad (10)$$

((¹), § 3).

Если нормали первого рода и нормали второго рода образуют конгруенции, которые соответственно сопряжены и гармоничны поверхности, то координаты точки x^α и плоскости ξ_α можно пронормировать так, что при этом тензор b_{ij} будет удовлетворять уравнению Кодацци по отношению ко всем трем внутренним геометриям, а $\omega_i = 0$ ((¹), § 12).

По отношению к любой нормализации тензор a_{ij}^k Фубини-Чеха ((²), § 14) выражается следующим образом:

$$a_{ij}^k = -\frac{1}{2} (s_{ij}^k - \delta_i^k T_j - \delta_j^k T_i - b_{ij} b^{km} T_m). \quad (11)$$

Проективная нормаль поверхности определяется по формуле (8) вектором

$$\tau_i = \nu_i = \frac{1}{2} (\omega_i + \partial_i \ln J - T_i), \quad (12)$$

где

$$J = -\frac{1}{2} \tilde{b}^{mn} a_{ml}^k a_{kn}^l \quad (13)$$

есть относительный инвариант Фубини-Чеха ((²), § 14).

Директриса Вильчинского определяется таким же образом вектором

$$\tau_i = \delta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{J} \tilde{b}^{mn} a_{im}^l \overset{0}{\nabla}_k a_{ln}^k - T_i \right), \quad (14)$$

а произвольная прямая канонического пучка поверхности вектором

$$\tau_i = \alpha_i = (2\lambda + 1) \nu_i - 2\lambda \delta_i = \lambda \psi_i + \nu_i, \quad (15)$$

где λ — постоянная, соответствующая этой прямой.

Вектор

$$\psi_i = 2(\nu_i - \delta_i) = \omega_i + \partial_i \ln J - \frac{1}{J} \tilde{b}^{mn} a_{im}^l \overset{0}{\nabla}_k a_{ln}^k \quad (16)$$

не зависит от нормализации, нормирования и от того, какие коэффициенты z_{ij}^k , G_{ij}^k или Γ_{ij}^k употребляются для составления выражения ковариантной производной.

Если поверхность отнесена к своим асимптотическим линиям, а ее проективный линейный элемент имеет вид

$$ds = \frac{\beta du^2 + \gamma dv^2}{du dv},$$

то

$$a_{11}^2 = \beta, \quad a_{22}^1 = \gamma, \quad \psi_1 = \partial_1 \ln \beta \gamma^2, \quad \psi_2 = \partial_2 \ln \beta^2 \gamma. \quad (17)$$

Изотермо-асимптотические поверхности характеризуются тем, что для них тензор ψ_i градиентен.

Если нормаль первого рода совпадает с аффинной нормалью поверхности, а нормаль второго рода лежит в бесконечно удаленной плоскости, то $T_i = 0$. Пользуясь обозначениями Бласске ⁽⁵⁾ и полагая

$$b_{ij} = G_{ij},$$

будем иметь

$$\omega_i = 0, \quad a_{ij}^k = A_{ij}^k.$$

Инвариант J только знаком отличается от инварианта Pick'a, а тензор ψ_i и тензор c_{ij} связаны соотношениями:

$$\psi_i = \partial_i \ln J - \frac{1}{J} \tilde{b}^{mn} A_{im}^l c_{ln}, \quad (18)$$

$$c_{ij} = (\psi_p - \partial_p \ln J) A_{ij}^p. \quad (19)$$

Условие совпадения аффинной нормали с прямой канонического пучка имеет вид

$$\partial_i \ln J = -2\lambda \psi_i, \quad (20)$$

вследствие чего

$$c_{ij} = (2\lambda + 1) \psi_s A_{ij}^s. \quad (21)$$

Очевидно, что указанное совпадение может иметь место либо при $\lambda = 0$, т. е. для проективной нормали, либо если ψ_i — градиент, т. е. для изотермо-асимптотической поверхности. Из (21) непосредственно следует, что при $\lambda = -\frac{1}{2}$ $c_{ij} = 0$, а это показывает, что директриса

Вильчинского совпадает с аффинной нормалью на аффинных сферах.

Если нормаль первого рода совпадает с метрической нормалью поверхности евклидова пространства, а нормаль второго рода лежит в бесконечно удаленной плоскости, то геометрия первого рода совпадает с внутренней геометрией поверхности в классическом смысле этого слова. Обозначим через g_{ij} , b_{ij} тензоры первой и второй квадратичных форм поверхности, а через ε_{ij} , ε^{ij} — дискриминантный бивектор первой квадратичной формы и бивектор, взаимный ему. Этим бивектором мы будем пользоваться в дальнейшем для того, чтобы поднимать индексы, полагая, например,

$$b_j^i = \varepsilon^{ik} b_{kj}, \quad g^{ij} = \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} g_{kl}.$$

Вследствие уравнений Гаусса и Кодацци будем иметь

$$\omega_i = 0, \quad T_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K \quad (22)$$

((¹), § 4), где K — гауссова кривизна поверхности.

Рассмотрим тензоры

$$q_{ij} = \frac{1}{2} (g_i^k b_{kj} + g_j^k b_{ki}), \quad p_{ij} = K g_{ij} - H b_{ij} \quad (23)$$

((³), стр. 148), где H есть средняя кривизна поверхности. Первый из них есть тензор линий кривизны, а второй — тензор сопряженной сети, гармонически разделяющей первую. Пользуясь обозначениями

$$H_i = \partial_i H, \quad \theta = K - H^2 \quad (24)$$

и вводя вектор

$$R^i = (H_k - H T_k) \tilde{b}^{ki} - T_k g^{ki} *, \quad (25)$$

* Линейчатые поверхности характеризуются тем, что для них этот вектор направлен по асимптотической линии, а его обращение в нуль характеризует поверхности второго порядка.

мы можем представить тензор a_{ij}^k Фубини и инвариант J в следующем виде

$$a_{ij}^k = \frac{1}{2\theta} R^l (b_l^k q_{ij} - \delta_l^k p_{ij}), \quad (26)$$

$$J = \frac{1}{2\theta} R^i R^j b_{ij}. \quad (27)$$

Используя, кроме того, соотношение

$$\nabla_k b_{ij} = \frac{R^l}{\theta} (b_{kl} p_{ij} - K \varepsilon_{kl} q_{ij} + b_{ik} T_j + b_{jk} T_i - b_{ij} T_k), \quad (28)$$

которое позволяет выразить всякий тензор поверхности через тензоры g_{ij} , b_{ij} и инварианты K и H , мы можем представить тензор ψ_i в следующем виде

$$\psi_i = \partial_i \ln J + \frac{1}{4J} \frac{R^k}{\theta^2} (M b_{ik} + N \varepsilon_{ik}), \quad (29)$$

где

$$M = 2\theta \nabla_k R^k - R^k \theta_k + 2HR^k R^l b_{kl} + 2HR^k T^l q_{kl} + 4\theta R^k T_k, \quad (30)$$

$$N = 2\theta b_i^j \nabla_j R^i - b_j^i R^j \theta_i + 2HR^i T^j p_{ij},$$

а

$$\begin{aligned} \nabla_k R^k &= \tilde{b}^{kl} (\nabla_k H_l - H \nabla_k T_l + 3H_k T_l - 4HT_k T_l) - \nabla_k T_l g^{kl}, \\ b_i^j \nabla_j R^i &= H^k T_k - \nabla_k T_l g^{mk} b_m^l. \end{aligned} \quad (31)$$

Поверхности евклидова пространства, метрическая нормаль которых совпадает с прямой канонического пучка, характеризуется следующим инвариантным соотношением, которое непосредственно вытекает из (15), (12) и (22):

$$2\lambda \psi_i + \partial_i \ln J - \partial_i \ln K^{1/4} = 0. \quad (32)$$

Если эта прямая будет проективной нормалью, то предыдущее условие сводится к следующему:

$$J = CK^{1/4}.$$

В противном случае оно показывает, что рассматриваемая поверхность будет изотермо-асимптотической.

В качестве примера поверхности, метрическая нормаль которой совпадает с ее проективной нормалью, можно привести поверхность вращения

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = z(u),$$

где z есть решение уравнения

$$(1 + z'^2)^4 (uz'z''' - 3uz''^2 + 3z'z''')^8 = Cu^7 z'^9 z''^{13}. \quad (33)$$

Формулы, определяющие прямую канонического пучка поверхности, находящейся в произвольной нормализации, в виде, отличном от вышеприведенного, были впервые получены А. И. Чахтаури ((6), стр. 1257). Поверхности метрического пространства, нормаль которых совпадает с прямой канонического пучка, были в специальной системе координат исследованы Н. И. Кованцовым ((4), стр. 1261).

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
2 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. П. Норден, Тр. семинара по векторн. и тензорн. исчислению, 6 (1948).
² G. Fubini—E. Sesh, Geometria proiettiva differenziale, 1, 1927. ³ Н. В. Ефимов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. исчислению, 5 (1941). ⁴ Н. И. Кованцов, ДАН, 58, № 7 (1947). ⁵ W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, II, 1923. ⁶ А. И. Чахтаури, ДАН, 59, № 7 (1948).