

МАТЕМАТИКА

В. РОХЛИН

**„ОБЩЕЕ“ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ  
НЕ ЕСТЬ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 II 1948)

Как известно, фазовое пространство динамической системы с заданной в нем инвариантной мерой, конечной для всего пространства, при весьма широких и естественных допущениях изометрично отрезку прямой с обычной лебеговской мерой. Поэтому вопросы чисто метрической теории динамических систем можно изучать не только с виду частном случае отрезка прямой.

Пусть  $I$  — единичный отрезок с обычной мерой Лебега  $\mu$ . Взаимно-однозначное преобразование отрезка  $I$ , обладающее тем свойством, что как оно, так и обратное ему преобразование переводит всякое измеримое множество в измеримое той же меры, мы будем называть автоморфизмом. Автоморфизм  $T$  называется перемешиванием <sup>(1)</sup>, если для любых двух измеримых множеств  $A$  и  $B$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\mu(T^n A \cdot B) \rightarrow \mu A \cdot \mu B.$$

В более широком смысле  $T$  есть перемешивание <sup>(1)</sup>, если для любых двух измеримых множеств  $A$  и  $B$  при  $n - m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n - m} \sum_{k=m+1}^n [\mu(T^k A \cdot B) - \mu A \cdot \mu B]^2 \rightarrow 0.$$

Аutomорфизмы, отличающиеся друг от друга только на множестве меры нуль, естественно объединяются в один класс. Множество всех таких классов мы будем обозначать через  $\mathfrak{A}$  и, ради краткости, будем называть элементы множества  $\mathfrak{A}$  просто автоморфизмами. Если положить  $\rho(A \dashv B - AB) = \rho(A, B)$  и объявить окрестностью автоморфизма  $T_0$  множество автоморфизмов  $T$ , удовлетворяющих конечному числу неравенств вида

$$\rho(T_0 A, TA) < \varepsilon,$$

где  $A$  — измеримое множество, а  $\varepsilon$  — положительное число, то  $\mathfrak{A}$  станет топологическим пространством. Это пространство имеет счетную базу и обладает метрикой, в которой оно полно; мы будем обозначать его через  $\mathfrak{M}_s$ .

Р. Р. Halmos <sup>(2)</sup> доказал, что множество всех перемешиваний в широком смысле — обозначим его через  $\mathfrak{M}_0$  — есть всюду плотное  $G_\delta$  в  $\mathfrak{M}_s$ .

Я хочу показать в этой заметке, что, напротив, множество  $\mathfrak{M}_1$  всех перемешиваний в собственном смысле имеет первую категорию в  $\mathfrak{A}_s$ .

Таким образом, автоморфизмы, являющиеся перемешиваниями в широком смысле, но не являющиеся перемешиваниями в собственном смысле, составляют в  $\mathfrak{A}_s$  подавляющее большинство.

Доказательство совсем просто; оно опирается только на одну элементарную теорему, касающуюся периодических автоморфизмов. Автоморфизм  $T$  называется периодическим в точке  $x \in I$ , если существует натуральное число  $n$ , для которого  $T^n x = x$ ; наименьшее из таких чисел называется периодом автоморфизма  $T$  в точке  $x$ . Автоморфизм, имеющий период  $p$  во всех точках отрезка  $I$ , называется периодическим автоморфизмом с периодом  $p$ . Множество всех периодических автоморфизмов с периодом  $p$  мы обозначаем через  $\mathfrak{P}_p$ . Теорема, которой мы хотим воспользоваться<sup>(3)</sup>, утверждает, что при любом натуральном  $k$  множество

$$\mathfrak{P}'_k = \bigcup_{p=k+1}^{\infty} \mathfrak{P}_p$$

всюду плотно в  $\mathfrak{A}_s$ .

Обозначим через  $E$  левую половину отрезка  $I$ , а через  $\mathfrak{E}_n$  — множество тех автоморфизмов  $T \in \mathfrak{A}_s$ , для которых

$$\left| \mu(T^n E \cdot E) - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{5},$$

и положим:

$$\mathfrak{E}'_k = \bigcap_{n=k+1}^{\infty} \mathfrak{E}_n, \quad \mathfrak{E}' = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{E}'_k.$$

Очевидно,  $\mathfrak{E}' \supset \mathfrak{M}_1$ ; следовательно, чтобы показать, что  $\mathfrak{M}_1$  имеет первую категорию в  $\mathfrak{A}_s$ , достаточно обнаружить, что все  $\mathfrak{E}'_k$  суть нигде не плотные множества.

Так как все  $\mathfrak{E}_n$  замкнуты, то и все  $\mathfrak{E}'_k$  замкнуты, и нужно только установить, что при любом  $k$  дополнение

$$\mathfrak{A}_s - \mathfrak{E}'_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} (\mathfrak{A}_s - \mathfrak{E}_n)$$

множества  $\mathfrak{E}'_k$  всюду плотно в  $\mathfrak{A}_s$ . А для этого достаточно заметить, что при  $P \in \mathfrak{P}_p$

$$P^p E = E, \quad \mu(P^p E \cdot E) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

и что, следовательно  $\mathfrak{A}_s - \mathfrak{E}_p \supset \mathfrak{P}_p$  и  $\mathfrak{A}_s - \mathfrak{E}'_k \supset \mathfrak{P}'_k$ .

Топология пространства  $\mathfrak{A}_s$  не является единственной естественной топологией множества  $\mathfrak{A}$ : приняв за расстояние  $d(S, T)$  двух автоморфизмов  $S, T \in \mathfrak{A}$  меру множества тех точек  $x \in I$ , для которых  $Sx \neq Tx$ , мы превратим  $\mathfrak{A}$  в полное метрическое пространство, которое в дальнейшем будем обозначать через  $\mathfrak{A}_d$ . Правда, пространство  $\mathfrak{A}_d$  несепарабельно, но во многих отношениях метрика  $d$  представляет преимущество перед теми метриками, которые могут быть введены в  $\mathfrak{A}_s$ .

Сохранят ли множества  $\mathfrak{M}_0$  и  $\mathfrak{M}_1$  в метрике  $d$  тот вес, который они имеют в пространстве  $\mathfrak{A}_s$ ? Оказывается, что это действительно будет так, если считать основным не все пространство  $\mathfrak{A}_d$ , а его подпространство  $\mathfrak{A}_d$ , состоящее из нигде не периодических автоморфизмов.

Именно, оказывается, что: 1) множество  $\mathfrak{M}$  (будучи нигде не плотным) замкнуто в  $\mathfrak{M}_d$ , т. е.  $\mathfrak{M}_d$  есть полное метрическое пространство; 2)  $\mathfrak{M}_0$  есть всюду плотное  $G_\delta$  в  $\mathfrak{M}_d$  и 3)  $\mathfrak{M}_1$  имеет первую категорию в  $\mathfrak{M}_d$ .

Доказательство опирается на следующую теорему:

*Каковы бы ни были автоморфизм  $T \in \mathfrak{M}$  и положительное число  $\varepsilon$ , Каковы бы ни были автоморфизм  $T \in \mathfrak{M}$ , натуральное число  $n$  и положительное число  $\varepsilon$ , существует измеримое множество  $A \in I$ , не пересекающееся ни с одним из своих образов  $TA, T^2A, \dots, T^{n-1}A$  и имеющее меру, большую  $\frac{1}{n} - \varepsilon$ .*

Простым следствием этой теоремы является тот факт, что для всякого автоморфизма  $T \in \mathfrak{M}$  имеет место точное равенство

$$d(T, \mathfrak{P}_p) = \frac{1}{p},$$

служащее уточнением аппроксимационной теоремы Р. Р. Халмоса<sup>(2)</sup>:

$$d(T, \mathfrak{P}_p) \leq \frac{4}{p}.$$

Поступило  
26 II 1948

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> E. Hopf, Ergodentheorie, Berlin, 1937. <sup>2</sup> P. R. Halmos, Ann. Math., (2), 45 784 (1944). <sup>3</sup> P. R. Halmos, Trans. Am. Math. Soc., 55, 1 (1944).