

С. К. ГОДУНОВ

О ЗАДАЧЕ МИНКОВСКОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 I 1948)

В работе даны оценки для задачи Минковского о произведении двух линейных неоднородных выражений ⁽¹⁾ в зависимости от соответствующих марковских констант. Исследование проводится методом, по существу не отличающимся от метода А. Я. Хинчина, примененного им с той же целью для случая задачи Чебышева ⁽²⁾, причем приходится изменить лишь некоторые детали. Предлагаемая геометризация этого метода позволяет одновременно получить как результат А. Я. Хинчина для случая Чебышева, так и соответственный результат для случая Минковского.

Пусть λ — верхняя грань чисел C , при которых неравенство $|(\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)| < C$ не имеет решений в целых x и y , отличных от 0, 0 (мы считаем все время $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 1$).

Теорема. При любых действительных γ_1, γ_2 существуют такие целые $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что:

$$|(\alpha_1 \bar{x} + \beta_1 \bar{y} + \gamma_1)(\alpha_2 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \gamma_2)| \leq \frac{\sqrt{1-4\lambda^2}}{4}.$$

Оценка может быть улучшена, если форма $F = (\alpha_1 x + \beta_1 y) \times (\alpha_2 x + \beta_2 y)$ эквивалентна, напр., одной из форм вида $\frac{x^2 + (2n+1)xy - y^2}{V \frac{4n^2 + 4n + 5}{5}}$ и является точной, если F эквивалентна $\frac{x^2 + xy - y^2}{V 5}$ или $\frac{x^2 + 2nxy - y^2}{2V n^2 + 1}$ $n > 0$ целое).

1. Рассмотрим декартовы координаты uv на плоскости (рис. 1) и целочисленную решетку, построенную на репере, задаваемом матрицей

$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$. Координаты ее точек получаются, если подставлять в

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 x + \beta_1 y, \\ v &= \alpha_2 x + \beta_2 y \end{aligned}$$

целые x и y . Так как неравенство $|(\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)| < \lambda$ не имеет решений в целых x и y , отличных от 0, 0, то в гиперболическом кресте $|uv| < \lambda$ не лежит точек решетки, кроме начала координат, однако существуют такие x^*, y^* , что $|(\alpha_1 x^* + \beta_1 y^*)(\alpha_2 x^* + \beta_2 y^*)| = \lambda^*$, где λ^* сколь угодно мало отличается от λ .

Гиперболическим поворотом (т. е. преобразованием $u' = \kappa u$, $v' = \frac{1}{\kappa} v$) поместим точку $P(x^*, y^*)$ в вершину гиперболического

креста $|uv| = \lambda^*$ (т. е. в точку, для которой $|x^*| = |y^*| = \sqrt{\lambda^*}$). Отрезок OP имеет длину $\sqrt{2\lambda^*}$. Расстояние между двумя соседними рядами точек решетки, параллельными OP , будет $\frac{1}{\sqrt{2\lambda^*}}$. Проведем по обе стороны от OP прямые a и b на расстоянии $\frac{1}{2\sqrt{2\lambda^*}}$ от OP . Гипербо-

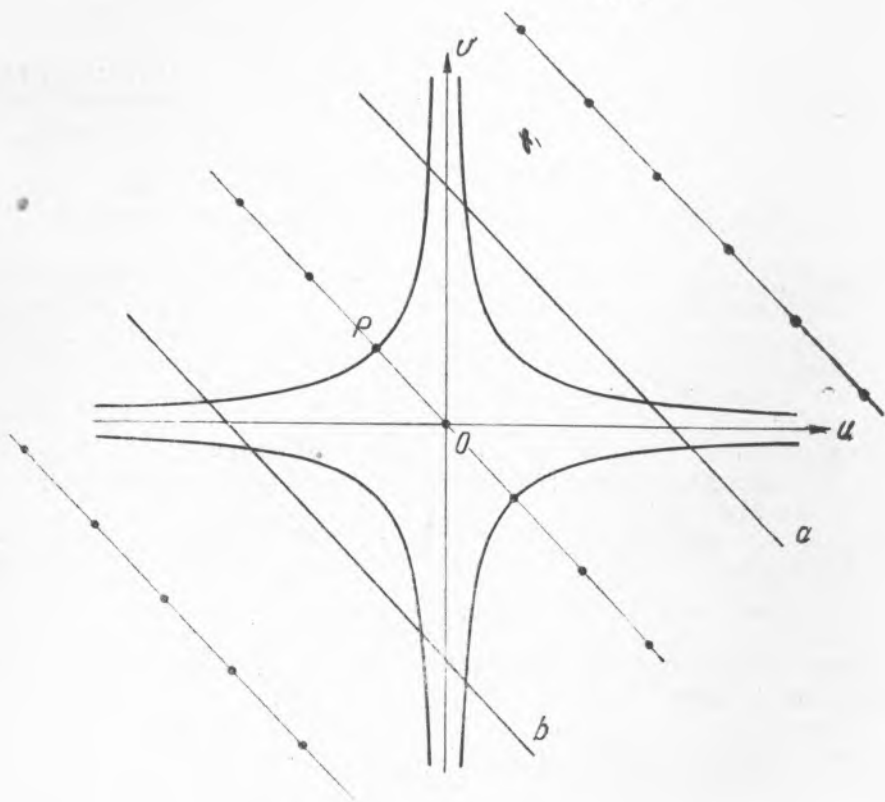


Рис. 1

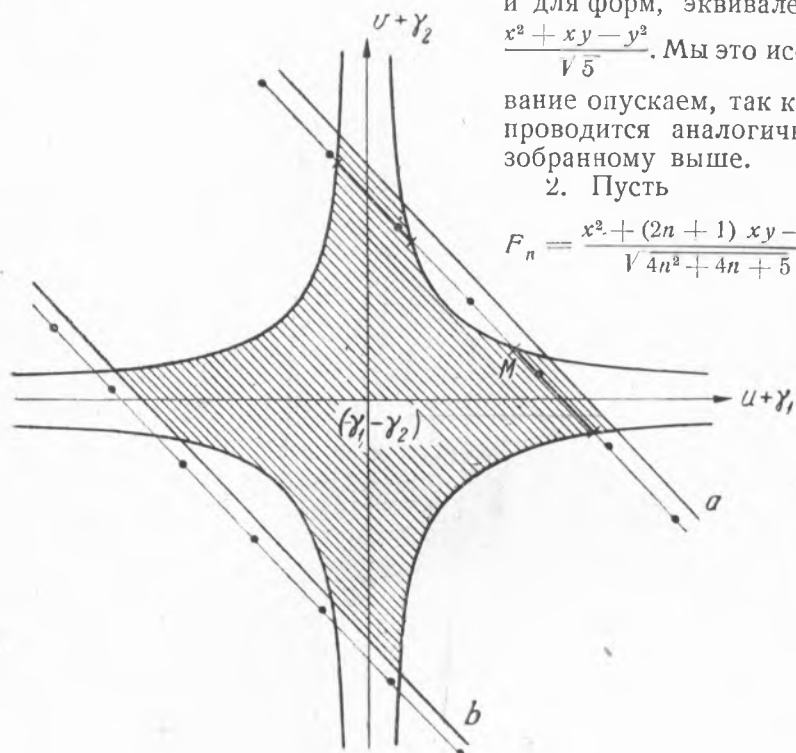
лический крест $|uv| \leq \frac{\sqrt{1-4\lambda^*}}{4}$ содержит внутри себя по два отрезка длины $\sqrt{2\lambda^*}$ от каждой из прямых a и b , если $\lambda^* \leq \frac{1}{8}$. Мы будем рассматривать пока только этот случай. Каждая прямая, параллельная OP и лежащая между прямыми a и b , очевидно, имеет внутри креста отрезок длины большей $\sqrt{2\lambda^*}$.

Оставляя решетку на месте, передвинем параллельно самому себе крест $|uv| \leq \frac{\sqrt{1-4\lambda^*}}{4}$ вместе с закрепленными на нем прямыми a и b так, чтобы его центр попал в точку с координатами $-\gamma_1, -\gamma_2$ (рис. 2). Расстояние между a и b равно расстоянию между двумя соседними, параллельными a линейными рядами точек решетки. Поэтому между a и b или на каждой из них будет лежать при любых γ_1 и γ_2 линейный ряд, имеющий внутри креста отрезок длины не меньшей $\sqrt{2\lambda^*}$, а точки на нем лежат на расстоянии $\sqrt{2\lambda^*}$ одна от другой. Значит, внут-

при креста найдется точка решетки (точка M на рис. 2), что и означает существование таких $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что:

$$|(\alpha_1 \bar{x} + \beta_1 \bar{y} + \gamma_1)(\alpha_2 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \gamma_2)| \leq \frac{\sqrt{1-4\lambda^*}}{4}.$$

Из того, что λ^* можно взять как угодно близко к λ , следует первое утверждение теоремы для всех форм, не эквивалентных $\frac{x^2 + xy - y^2}{\sqrt{5}}$ *. Используя результаты п. 2, можно получить оценку



и для форм, эквивалентных $\frac{x^2 + xy - y^2}{\sqrt{5}}$. Мы это исследование опускаем, так как оно проводится аналогично рассмотренному выше.

2. Пусть

$$F_n = \frac{x^2 + (2n+1)xy - y^2}{\sqrt{4n^2 + 4n + 5}}.$$

Рис. 2

Тогда „длины“ всех сторон полигона Клейна ⁽⁴⁾ решетки, задаваемой формой F_n по отношению к ее асимптотам, будут равны $2n+1$.

Возьмем три последовательные вершины A_1, A_2 и A_3 полигона Клейна и рассмотрим векторы OA_1, OA_2 и OA_3 (рис. 3). Пусть обычная длина OA_1 будет ρ_1 , длина OA_2 ρ_2 , длина OA_3 ρ_3 . По обе стороны от каждого линейного ряда, параллельного OA_1 , на расстоянии $\frac{n+1}{(2n+3)\rho_1}$ от него проведем параллельные ему прямые. Таким образом, каждый линейный ряд, параллельный OA_1 , оказывается заключенным в полосу ширины $\frac{2(n+1)}{(2n+3)\rho_1}$. Аналогично линейные ряды, параллельные OA_2 и OA_3 ,

* Как известно ⁽³⁾, для всех форм, не эквивалентных $\frac{x^2 + xy - y^2}{\sqrt{5}}$, $\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$;

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}}$ только для форм, эквивалентных $\frac{x^2 + 2xy - y^2}{\sqrt{8}}$, причем минимум достигается, например, при $x=1, y=0$.

заклучим в полосы ширины $\frac{2(n+1)}{(2n+3)\rho_2}$ и $\frac{2(n+1)}{(2n+3)\rho_3}$ соответственно.

Несложный подсчет показывает, что каждая точка параллелограмма, построенного на векторах OA_1 и OA_2 , а следовательно и всей плоскости, окажется покрытой по крайней мере одной из этих полосок.

Пусть точка γ_1, γ_2 лежит в полоске, окружающей линейный ряд, параллельный OA_j . Тогда существует параллельный OA_j линейный ряд, удаленный от нашей точки не более, чем на $\frac{n+1}{(2n+3)\rho_j}$, что, очевидно, меньше, чем $\frac{1}{2\rho_j}$, откуда следует, что полученная оценка неточна, по крайней мере для форм, эквивалентных F_n ($n \geq 1$).

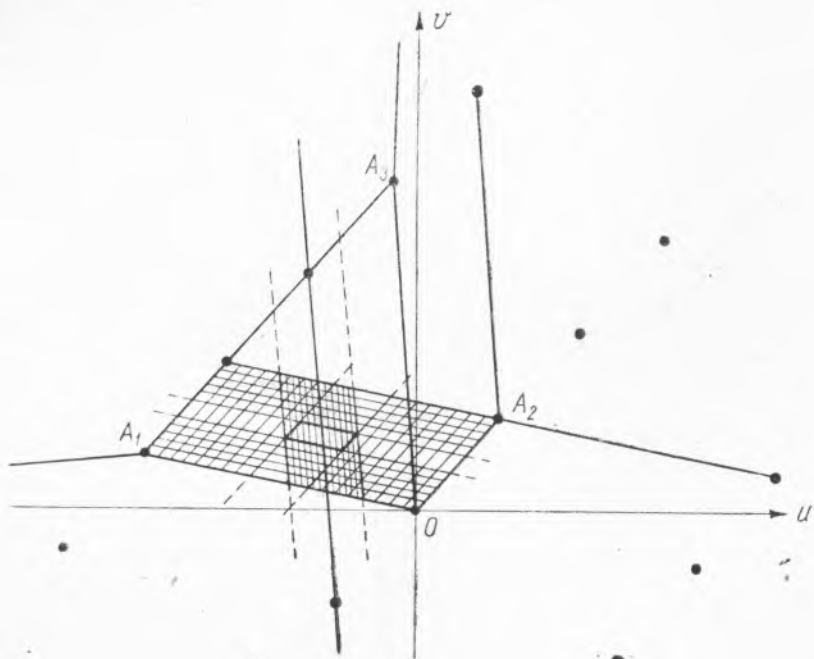


Рис. 3

Точность оценки для форм, эквивалентных $\frac{x^2 + 2nxy - y^2}{2Vn^2 + 1}$, вытекает из результатов, полученных Б. Н. Делоне⁽⁵⁾, а для форм, эквивалентных F_0 , из того, что

$$\frac{1}{V5} \left(x + \frac{1-V5}{2} y + \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1+V5}{2} y + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4V5} = \frac{V1-4\lambda^2}{4}$$

при $x=0, y=0$ и меньших значений не принимает.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Minkowski, Math. Ann., 54, 91 (1901). ² А. Я. Хинчин, Изв. АН СССР, 10, 281 (1946). ³ А. А. Марков, О бинарных квадратичных формах положительного определителя, СПб, 1880. ⁴ Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел, 1947, стр. 160. ⁵ Б. Н. Делоне, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 505 (1947).