

Академик В. П. НИКИТИН, В. К. ТУРКИН и Н. П. КУНИЦКИЙ

# О ДИАГРАММАХ, ПОКАЗЫВАЮЩИХ, В КАКОЙ МЕРЕ ЗАТУХАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ ЗАТУХАНИЯ ПО ПРОСТОМУ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

В наших работах (1-3) изложены методы построения диаграмм устойчивости, которые иллюстрируют зависимость коэффициента затухания (или возрастания) переходного процесса от параметров, входящих в дифференциальные уравнения, описывающие работу рассматриваемой динамической системы, и методы построения диаграмм частоты колебания, иллюстрирующих зависимость от тех же параметров круговой частоты переходного процесса.

В настоящей статье излагается метод построения еще одного вида диаграмм, представляющих, как нам кажется, интерес при исследовании характера переходного процесса.

Мы рассматриваем динамическую систему, описываемую совокупностью дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\omega_1/dt &= f_1(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \\ d\omega_2/dt &= f_2(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \\ &\vdots \\ d\omega_n/dt &= f_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  — некоторые переменные величины, значения которых характеризуют состояние рассматриваемой динамической системы.

Мы предполагаем, что правые части уравнений (1) не содержат  $t$  явно. Пусть

$$\omega_1^* = \omega_1, \quad \omega_2^* = \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_n^* = \omega_n \quad (2)$$

( $\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_n^*$  — некоторые постоянные) есть некоторое стационарное состояние рассматриваемой динамической системы.

Пусть

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (3)$$

уравнение, корни которого являются характеристическими числами  $n$  линейно независимых решений уравнений возмущенного движения, причем мы предполагаем, что уравнение (3) не имеет кратных корней.

Произведем в уравнении (3) замену

$$s = u + Q$$

( $Q$  — действительное число); получим уравнение вида

$$u^n + b_1(Q) u^{n-1} + b_2(Q) u^{n-2} + \dots + b_{n-1}(Q) u + b_n(Q) = 0. \quad (4)$$

Если для коэффициентов уравнения (4) выполняются условия Гурвица, то для корней уравнения (3) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}(s) < Q.$$

Произведем в уравнении (3) замену

$$s = q - v$$

( $q$  — действительное число, меньшее чем  $Q$ ); получим уравнение

$$v^n + c_1(q) v^{n-1} + c_2(q) v^{n-2} + \dots + c_{n-1}(q) v + c_n(q) = 0. \quad (5)$$

Если для коэффициентов уравнения (5) удовлетворяются условия Гурвица, то для корней уравнения (3) выполняются условия

$$\operatorname{Re}(s) > q.$$

Положим

$$Q - q = \varepsilon,$$

где, очевидно,  $\varepsilon > 0$ .

Пусть условия Гурвица для уравнения (4) имеют вид

$$\alpha_1(Q) > 0, \alpha_2(Q) > 0, \dots, \alpha_n(Q) > 0, \quad (6)$$

а условия Гурвица для уравнения (5) — вид

$$\beta_1(q) > 0, \beta_2(q) > 0, \dots, \beta_n(q) > 0. \quad (7)$$

В той области значений коэффициентов уравнения (3), в которой выполняются как условия (6), так и условия (7), для всех корней этого уравнения имеют место соотношения

$$q < \operatorname{Re}(s) < Q. \quad (8)$$

Если для всех корней уравнения (3) имеют место неравенства (8), то мы можем отметить, во-первых, что коэффициент затухания переходного процесса при стремлении рассматриваемой динамической системы к стационарному состоянию (2) имеет значение, заключенное между числами  $-q$  и  $-Q$  (мы считаем коэффициент затухания положительным в случае затухания переходного процесса и отрицательным в противоположном случае).

Далее, из того обстоятельства, что для всех корней уравнения (3) выполняются неравенства (8), следует, что действительные части любых двух корней уравнения (3) отличаются одна от другой не больше, чем на величину  $\varepsilon$ . Чем меньше значение  $\varepsilon$ , тем более „правильный“ характер имеет переходной процесс при стремлении рассматриваемой динамической системы к стационарному состоянию (2).

Действительно, вышеупомянутый переходной процесс в случае, когда он является затухающим (именно этот случай представляет по

преимуществом практический интерес), описывается, начиная с некоторого момента времени, приближенными равенствами вида:

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_1^* &\cong \sum_{i=1}^n C_{1i} e^{s_i t}, \\ \omega_2 - \omega_2^* &\cong \sum_{i=1}^n C_{2i} e^{s_i t}, \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n - \omega_n^* &\cong \sum_{i=1}^n C_{ni} e^{s_i t},\end{aligned}\tag{9}$$

где  $s_i (i=1, 2, \dots, n)$  — корни уравнения (3),  $C_{hi} (h=1, 2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n)$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий; в случае линейной системы равенства (9), характеризующие переходный процесс, являются точными, а не приближенными, и справедливы в любой момент времени.

Очевидно, что чем меньше  $\varepsilon$ , тем меньше переходный процесс, характеризуемый равенствами (9), отличается от простого экспоненциального процесса, протекающего по закону вида  $Ce^{st}$ .

Кроме того, чем меньше значение  $\varepsilon$ , тем в меньшей мере характер переходного процесса будет зависеть от значения произвольных постоянных интегрирования.

Диаграмму, иллюстрирующую зависимость коэффициента как затухания, так и правильности переходного процесса от различных параметров, входящих в коэффициенты уравнений (1), мы будем называть диаграммой правильности переходного процесса.

Таким образом, при построении диаграммы правильности переходного процесса по координатным осям откладываются значения каких-либо параметров (или комбинаций из параметров) из коэффициентов уравнений (1), а затем координатная плоскость разбивается на области, каждая из которых ограничена линиями:

$$\begin{aligned}\alpha_1(Q) &= 0, \quad \alpha_2(Q) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n(Q) = 0, \\ \beta_1(q) &= 0, \quad \beta_2(q) = 0, \quad \dots, \quad \beta_n(q) = 0\end{aligned}$$

при некоторых заданных значениях  $Q$  и  $q$  (причем  $Q > q$ ).

Заметим, что, ввиду специфического характера условий Гурвица, при построении для какой-либо динамической системы диаграммы правильности переходного процесса приходится проводить на координатной плоскости только линии того же вида, как и при построении диаграммы устойчивости для той же системы; однако при построении диаграммы правильности переходного процесса приходится наносить на чертеж не только те же участки упомянутых линий, как при построении диаграммы устойчивости, но и другие участки тех же линий.

Поступило  
25 XII 1947

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1567 (1946). <sup>2</sup> В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 58, № 4 (1947). <sup>3</sup> В. П. Никитин, В. К. Туркин и Н. П. Куницкий, ДАН, 59, № 1 (1948).