

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и А. М. ЯГЛОМ

**ОБЩИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1947)

1. В этой заметке рассматриваются уравнения вида

$$\sum_{i=0}^3 L^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + i\kappa \psi = 0, \quad (1)$$

где значения функции $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \psi(ct, x, y, z)$ принадлежат конечномерному или бесконечномерному пространству R , в котором действует некоторое представление группы Лоренца; L^0, L^1, L^2, L^3 — линейные преобразования (матрицы) в пространстве R , а κ — вещественная постоянная. Уравнение (1) называется инвариантным, если для любой матрицы Лоренца $\|l_j^i\|$ имеет место равенство $L^i =$

$= \sum_{j=0}^3 l_j^i S^j S^{-1}$, где S — преобразование величин ψ , отвечающее

матрице $\|l_j^i\|$. Вслед за известным уравнением Дирака различные частные случаи таких уравнений неоднократно исследовались различными авторами (см., например, (1-5)). Общий вид уравнения (1) для конечномерного R рассматривался в работах (6,7)*. В настоящей работе одновременно изучаются как конечномерные, так и бесконечномерные инвариантные уравнения.

2. Неприводимые бесконечномерные представления собственной группы Лоренца. В этом пункте мы приведем в наиболее удобном для нас виде формулы, задающие неприводимые представления группы Лоренца, перечисленные в (8,9)**.

Эти представления определяются парой чисел k_0, k_1 , где k_0 — целое, k_1 — произвольное комплексное. Обозначим, как обычно, через $I^i = -I^{ji}$ ($i, j=0, 1, 2, 3$) линейное преобразование в пространстве $R(k_0, k_1)$, в котором действует наше представление, отвечающее инфинитезимальному преобразованию Лоренца в плоскости (x^i, x^j) .

* Примечание при корректуре. После сдачи настоящей работы в печать авторы познакомились с интересной работой (14), посвященной этому же вопросу.

** В работах (8,9) доказано, что указанные ниже формулы содержат в се унитарные неприводимые представления группы Лоренца. Если считать в (8,9) параметр ρ комплексным, то мы получим также и не унитарные бесконечномерные неприводимые представления (см. (9), стр. 504). Неприводимые бесконечномерные представления группы Лоренца рассматривались также в работах (10, 11) (последняя из этих работ известна авторам лишь по краткому сообщению в Physical Abstracts). Применение относящихся сюда результатов см. в (12).

Координатные векторы в $R_{(k_0, k_1)}$ обозначим через ξ_p^k . Здесь p для каждого k принимает $k+1$ значений: $p=k, k-2, k-4, \dots, -k$, а k , вообще говоря, принимает значения $|k_0|, |k_0|+2, |k_0|+4, \dots$. Исключением является случай, когда k_1 — целое число одинаковой с k_0 четности и $|k_1| > |k_0|$; тогда $k=|k_0|, |k_0|+2, \dots, |k_1|-2$. Представление в $R_{(k_0, k_1)}$ задается формулами:

$$2I^{32}\xi_p^k = ip\xi_p^k, \quad 2(I^{21} + iI^{13})\xi_p^k = (k+p)^{1/2}(k-p+2)^{1/2}\xi_{p-2}^k, \\ 2(I^{21} - iI^{13})\xi_p^k = -(k+p+2)^{1/2}(k-p)^{1/2}\xi_{p+2}^k, \quad (2)$$

$$4I^{01}\xi_p^k = -(k+p)^{1/2}(k-p)^{1/2}B_k\xi_p^{k-2} + pA_k\xi_p^k + \\ + (k-p+2)^{1/2}(k+p+2)^{1/2}B_{k+2}\xi_p^{k+2},$$

$$I^{02} = I^{01}I^{21} - I^{21}I^{01} = [I^{01}, I^{21}], \quad I^{03} = [I^{01}, I^{31}], \quad (3)$$

где

$$A_k = \frac{2k_0 k_1}{k(k+2)}, \quad B_k = \frac{(k^2 - k_0^2)^{1/2}(k^2 - k_1^2)^{1/2}}{(k^2 - 1)^{1/2}k}. \quad (4)$$

Из этих формул видно, что (k_0, k_1) и $(-k_0, -k_1)$ определяют одно и то же представление. Во всех остальных случаях представления, определяемые (k_0, k_1) и (k'_0, k'_1) , неэквивалентны. При k_1 чисто мнимом и при $k_0=0, 0 < k_1 < 2$ представления унитарны; при k_1 целом одинаковой четности с k_0 и $|k_1| > |k_0|$ представления конечномерны и эквивалентны представлениям в пространстве симметрических спиноров с $(|k_1 + k_0| - 2)/2$ непунктирными и $(|k_1 - k_0| - 2)/2$ пунктирными индексами.

3. Уравнения, инвариантные относительно собственной группы Лоренца. Из определения инвариантных уравнений, данного в п. 1, легко следует, что для них $L^i = [L^0, I^{0i}]$ ($i=1, 2, 3$) и что для того, чтобы по L^0 можно было построить инвариантное уравнение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:

$$L^0, I^{32} = 0, \quad [L^0, I^{21}] = 0, \quad [L^0, I^{13}] = 0, \quad (5)$$

$$[[L^0, I^{01}], I^{01}] = L^0. \quad (6)$$

Мы будем предполагать, что представление, действующее в пространстве R , разложено на сумму наших неприводимых представлений, и нумеровать эти представления индексами τ . Через $\xi_{p, \tau}^k$ мы будем обозначать введенные ранее координатные векторы, отвечающие представлению, отмеченному индексом τ . Из равенств (5) следует:

$$L^0 \xi_{p, \tau}^k = \sum_{\tau'} c_{\tau, \tau'}^k \xi_{p, \tau'}^k. \quad (7)$$

Для отыскания L^0 остается найти числа $c_{\tau, \tau'}^k$. Из равенства (6) можно вывести, что $c_{\tau, \tau'}^k \neq 0$ только если одно из чисел пары (k'_0, k'_1) , определяющей представление τ' , равно одному из чисел пары (k_0, k_1) , а второе из них отличается от второго из чисел (k_0, k_1) на ± 2 и что при $(k'_0, k'_1) = (k_0 + 2, k_1)$ (или $(k'_0, k'_1) = (k_1, k_0 + 2)$)

$$c_{\tau, \tau'}^k = c_{\tau, \tau}^k (k + k_0 + 2)^{1/2} (k - k_0)^{1/2}, \\ c_{\tau, \tau'}^k = c_{\tau, \tau}^k (k + k_0 + 2)^{1/2} (k - k_0)^{1/2}, \quad (I)$$

а при $(k'_0, k'_1) = (k_0, k_1 + 2)$ (или $(k_0, k'_1) = (k_1 + 2, k_0)$)

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^k &= c_{\tau\tau'} (k + k_1 + 2)^{1/2} (k - k_1)^{1/2}, \\ c_{\tau\tau'}^k &= c_{\tau\tau'} (k + k_1 + 2)^{1/2} (k - k_1)^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где $c_{\tau\tau'}$, $c_{\tau'\tau}$ — произвольные комплексные числа. В конечномерном случае (I) и (II) могут заменить более сложные формулы (66), (67), (47) и (48) работы (6).

4. Уравнения, инвариантные относительно отражений. Для того чтобы уравнение (1) было инвариантно относительно отражений, необходимо и достаточно, чтобы в R , наряду с неприводимым представлением τ , определяемым числами (k_0, k_1) (иначе $\tau \sim (k_0, k_1)$), имелось также представление $\tau' \sim (k_0, -k_1)$ (при $k_0 = 0$ или $k_1 = 0$, $\tau = \tau'$) и чтобы числа $c_{\tau\tau'}$ в формулах (I) и (II) удовлетворяли условиям

$$c_{\tau\tau'} = c_{\tau'\tau}, \quad \text{при } \tau \neq \tau', \quad \tau' \neq \tau;$$

$$c_{\tau\tau'} = \pm c_{\tau'\tau}, \quad \text{при } \tau = \tau'; \quad c_{\tau\tau'} = \pm c_{\tau'\tau}, \quad \text{при } \tau' = \tau.$$

5. Уравнения, получаемые из функции Лагранжа. Для того чтобы с данным уравнением можно было инвариантно связать физические величины (вектор тока, тензор энергии импульса и т. д.), а также построить функцию Лагранжа, необходимо, прежде всего, чтобы из величин ψ можно было составить инвариантную эрмитову квадратичную форму (ψ, ψ) (обозначаемую также $\psi^\dagger \psi$). Для выполнения законов сохранения необходимо далее, чтобы

$$(L^0 \psi, \psi) = (\psi, L^0 \psi). \quad (8)$$

При этих условиях мы сможем также получить уравнение из инвариантной функции Лагранжа.

Для существования инвариантной эрмитовой формы необходимо, чтобы наряду с представлением $\tau \sim (k_0, k_1)$ в R встречалось представление $\tau' \sim (k_0, -k_1^*)$, где k_1^* — комплексно сопряжено с k_1 . При этом для $\psi = \sum x_{p,\tau}^k \tau$ форма (ψ, ψ) задается формулой

$$(\psi, \psi) = \sum_{p, k, \tau} a_{\tau\tau'}^k x_{p,\tau}^k x_{p,\tau'}^{*k}, \quad (9)$$

где $a_{\tau\tau'}^k = \pm a_{\tau'\tau}^k$; знак в правой части этого равенства определяется

из рекуррентной формулы $a_{\tau\tau'}^k = \frac{B_k^*(k_0, -k_1^*)}{B_k(k_0, k_1)} a_{\tau\tau'}^{k-2}$. Числа $a_{\tau\tau'}^k = a_{\tau'\tau}^{*k}$ можно всегда считать равными ± 1 ; разные выборы знаков у $a_{\tau\tau'}^k$ могут приводить к физически различным уравнениям. Форма (ψ, ψ) будет инвариантна относительно отражений, если $a_{\tau\tau'}^k = a_{\tau'\tau}^{*k}$.

Подставляя выражение (9) для (ψ, ψ) в равенство (8), мы получаем дополнительные условия, которым должны удовлетворять $c_{\tau\tau'}$.

6. Заряд, энергия, массы и спины. При условиях п. п. 3—5 уравнение (1) можно получить из функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2i} \left\{ \left(L^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \psi \right) - \left(\psi, L^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right) \right\} + \kappa(\psi, \psi). \quad (10)$$

Отсюда легко получить выражения для тензора энергии — импульса и вектора тока. В частности, плотность заряда ρ и плотность энергии

W для решения ψ уравнения (1) равны

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\hbar} (L^0 \psi, \psi), \quad W = -\frac{1}{2i} \left\{ \left(L^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0}, \psi \right) - \left(\psi, L^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right) \right\}. \quad (11)$$

Формула (7) показывает, что матрица L^0 распадается на „ящики“ $\|c_{\tau\tau}^k\|$, отвечающие различным значениям k . Собственным значениям $\lambda_i^{(k)}$ матриц $\|c_{\tau\tau}^k\|$, отличным от нуля, отвечают решения уравнения (1), описывающие покоящуюся частицу с массой $m_i^{(k)} = \kappa \hbar / c \lambda_i^{(k)}$ и спином, равным $k/2$ *. Из (I) и (II) следует, что в случае конечного числа представлений τ собственные значения $\lambda_i^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$ не могут убывать. Таким образом, попытки построить уравнение (1) с растущим спектром масс для случая конечного числа бесконечномерных неприводимых представлений обречены на неудачу.

7. Примеры. 1) Пусть представление, по которому преобразуется ψ , распадается на четыре конечномерных представления: $1 \sim (1, 3)$, $\bar{1} \sim (-1, 3)$, $3 \sim (1, 5)$ и $\bar{3} \sim (-1, 5)$. Тогда L^0 (т. е. матрицы $\|c_{\tau\tau}^k\|$, $k=1, 3$) для уравнения, удовлетворяющего всем условиям п. п. 3—5, может быть в зависимости от выбора знаков в (ψ, ψ) приведено к одному из следующих двух видов:

$$\begin{array}{cc} \text{a)} & \begin{array}{cc} k=1 & k=3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ 2\beta & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{б)} & \begin{array}{cc} k=1 & k=3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & i\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i\alpha \\ i\alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & i\alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2\beta \\ 2\beta & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

где α и β вещественны, $\alpha > 0$. В случае отсутствия комплексных собственных значений полный заряд может быть дефинитным лишь в случае б) при $\alpha = -\beta = 1$. При этом все собственные значения L^0 для $k=1$ равны нулю и уравнение (1) обращается в уравнение Паули — Фирца⁽²⁾ для спина $3/2$ ***.

2) Пусть представление, по которому преобразуется ψ , распадается на два бесконечномерных представления $1 \sim (1, k_1)$ и $\bar{1} \sim (-1, k_1)$ (k_1 — вещественное). Здесь $k=1, 3, 5, \dots$. Матрицы $\|c_{\tau\tau}^k\|$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix}$; спину $k/2$ соответствует масса $m^{(k)} = m_0 / (k+1)$. При $k_1=3$ уравнение распадается на два уравнения — уравнение Дирака и бесконечномерное уравнение со стремящимся к нулю спектром масс.

Поступило
18 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. J. Duffin, Phys. Rev., 54, 1114 (1938). ² M. Fierz and W. Pauli, Proc. Roy. Soc., A, 173, 211 (1939). ³ H. A. Kramers, F. J. Belinfante, J. K. Lubanski, Physica, 8, 597 (1941); J. K. Lubanski, ibid., 9, 310 (1942). ⁴ V. L. Ginsburg, J. of Phys., 8, 33 (1944). ⁵ H. J. Bhabha, Proc. Ind. Acad. Sci., A, 21, 241 (1945). ⁶ H. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys., 17, 200 (1945). ⁷ R. Potier, C. R., 222, 638 (1946). ⁸ I. M. Gelfand and M. A. Neumark, J. of Phys., 10, 93 (1946). ⁹ И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. мат., 11, 411 (1947). ¹⁰ V. Bargman, Ann. of Math., 48, 563 (1947). ¹¹ Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc., A, 189, 372 (1947). ¹² В. Л. Гинзбург и И. Е. Тамм, ЖЭТФ, 17, 227 (1947). ¹³ Harish-Chandra, Phys. Rev., 71, 793 (1947). ¹⁴ E. Wild, Proc. Roy. Soc., A, 191, 253 (1947).

* Особую роль играют собственные векторы, для которых $(\psi, \psi) = 0$; для них $\rho = 0$, $W = 0$, и $\lambda_i^{(k)}$ может оказаться комплексным (т. е. решение может экспоненциально возрастать при возрастании $|t|$).

** Утверждение о том, что уравнения Паули — Фирца не представимы в виде (I) см. (6, 13)), основано на недоразумении