

Г. П. АКИЛОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 X 1947)

1. В нашей заметке ⁽³⁾ рассматривается следующая задача: пусть даны линейные нормированные (кратко: типа B^-) пространства $X_0, X (X \supset X_0), Y$ и линейная операция U_0 , определенная на X_0 со значениями в Y ; каким условиям должно удовлетворять пространство X_0 , чтобы существовало распространение U операций U_0 на X , имеющее ту же норму? Аналогичный вопрос ставится там относительно пространства Y .

Если пространство X_0 , соответственно Y , удовлетворяет этим условиям, то мы говорим, что оно обладает свойством (E_0) , соответственно свойством (E_y) .

Здесь будут сформулированы некоторые дальнейшие результаты, относящиеся к этим вопросам. Прежде всего имеет место

Теорема 1. *Свойства (E_0) и (E_y) эквивалентны. Т. е., если некоторое пространство типа B^- обладает свойством (E_0) , то оно обладает также свойством (E_y) , и наоборот.*

2. Линейное нормированное полуупорядоченное пространство типа B_1 (см. ^(1,2)) называется пространством с аддитивной нормой (кратко: типа L), если из $x_1, x_2 \in X, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ следует $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$.

Относительно пространств типа L может быть высказана

Теорема 2. *Пространство типа L , содержащее хотя бы три линейно независимых элемента, не обладает свойством (E_0) .*

Замечание. Требование наличия трех линейно независимых элементов в теореме 2 существенно. Двумерное пространство типа L обладает свойством (E_0) .

3. Большая часть результатов ⁽³⁾ сформулирована в терминах теории полуупорядоченных пространств Л. В. Канторовича. Приводимое ниже предложение применимо к любым пространствам типа B^- .

Теорема 3. *Конечномерное пространство типа B^- с гладкой единичной сферой* не обладает свойством (E_0) , если размерность его более единицы.*

Теорема 3 приобретает значение в связи со следующим предложением.

* Пространство X типа B^- называется пространством с гладкой единичной сферой, если для каждого отличного от нуля элемента $x \in X$ существует единственный линейный функционал $\|f\|$ такой, что $f = 1, f(x) = \|x\|$.

Теорема 4. Пусть X — пространство, обладающее свойством E_0 , и $X_0 \subset X$ такое подпространство, что существует проекция P^* пространства X на X_0 с $\|P\|=1$. Тогда X_0 также обладает свойством (E_0) .

В силу теоремы 3 пространство $l_{2,2}$ не обладает свойством (E_0) , поэтому следствие к теореме 3 из ⁽³⁾ может быть сформулировано теперь так:

Следствие. Если X — пространство типа B^- , содержащее не менее двух линейно независимых элементов, то оно содержит подпространство X_0 , не обладающее свойством (E_0) .

4. Не вдаваясь в подробности, укажем, что теорема 3 из ⁽³⁾ может быть доказана в несколько более сильной формулировке. Именно,

предположение $\frac{\eta}{(2-\eta)^2} < \rho$ может быть заменено на $\eta < \rho$.

Поступило
23 X 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Канторович, Мат. сб., 2(44): 1, 121 (1937). ² Л. Канторович, Мат. сб., 7(49): 2, 209 (1940). ³ Г. П. Акилов, ДАН, 57, № 7 (1947).

* Проекцией пространства X на $X_0 \subset X$ называется линейная операция P , отображающая X на X_0 и оставляющая без изменения элементы X_0 , т. е. $P(x) = x$ для $x \in X_0$.