

МАТЕМАТИКА

А. НОРДЕН

**О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ НЕПРЕРЫВНОГО ТОЧЕЧНОГО
СООТВЕТСТВИЯ НА ПЛОСКОСТИ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 V 1948)

В заметке ⁽¹⁾ мы назвали поверхность трехмерного пространства Мебиуса нормализованной, если через каждую ее точку проходит ортогональный ей круг. Чтобы задать нормализацию сферической поверхности, достаточно отнести всякой ее точке x другую точку X , в которой нормализующий круг пересекает эту сферу.

В соответствии с этим мы будем называть конформную плоскость (или сферу) нормализованной, если всякой ее точке x отнесена другая точка X той же плоскости.

Обозначив через x, X представителей тетрациклических координат и вводя два круга

$$y_i = \partial_i x - l_i x, \quad (1)$$

проходящих через точки x и X , мы будем иметь следующую таблицу билинейных ковариантов:

$$x^2 = X^2 = x y_i = X y_i = 0, \quad x X = 1, \quad y_i y_j = g_{ij} \quad (2)$$

и следующие дифференциальные уравнения:

$$\partial_i x = y_i + l_i x, \quad \partial_i X = g^{rs} p_{ri} y_s - l_i x, \quad (3)$$

$$\nabla_j y_i = \partial_j y_i - G_{ij}^k y_k = l_j y_i - p_{ij} x - g_{ij} X$$

и их условие интегрируемости:

$$g_{ii|j|k} = 2l_k g_{ij}, \quad (A)$$

$$p_{[ij]} = l_{[i|j]}, \quad (B)$$

$$p_{i[j|k]} = 0, \quad (C)$$

$$R_{ji} = p_{ij} - p_{ji} + g^{rs} p_{rs} g_{ij}. \quad (D)$$

Ковариантные производные составлены с помощью объекта G_{ij}^k , определяющего внутреннюю аффинную связность без кручения ⁽¹⁾. Тензор R_{ji} есть тензор Риччи этой связности. Условие (4, A) показывает, что внутренняя связность будет вейлевой, а ее угловая метрика совпадает с метрикой плоскости.

Введем в рассмотрение версор g_i^j , т. е. такой тензор, который, будучи применен к вектору v^i , дает вектор $\bar{v}^j = g_i^j v^i$, полученный

поворотом вектора v^i на прямой угол без растяжения. Версор удовлетворяет следующим условиям:

$$g_i^k g_k^j = -\delta_i^j, \quad g_k^k = 0, \quad \nabla_k g_i^j = 0. \quad (5)$$

При изменении нормализации, соответствующей зависимостям

$$y_i = \tilde{y}_i + p_i x, \quad (6)$$

внутренняя геометрия испытывает конформное преобразование, определяемое при неизменном тензоре g_{ij} зависимостью

$$l_i = \tilde{l}_i - p_i. \quad (7)$$

Коэффициенты связности преобразуются при этом так:

$$G_j^k = \tilde{G}_{ij}^k + p_i \delta_j^k - p_i g_j^k, \quad (8)$$

где

$$p_i = g_i^k p_k. \quad (9)$$

Из полной произвольности тензора p_i следует, что всякая геометрия Вейля двух измерений может рассматриваться как внутренняя геометрия плоскости, нормализованной соответствующим образом.

С каждым направлением v^i аналитического многообразия криволинейных координат u^1, u^2 мы можем связать опорный круг

$$v = v^k y_k, \quad (10)$$

проходящий через точки x и X ортогонально направлению сдвига точки x . Направляющим кругом последовательности опорных кругов $v = v(t)$ назовем круг, который проходит через точку x ортогонально двум смежным кругам последовательности. Направляющий круг последовательности направлений, касающихся некоторой кривой, есть ее круг кривизны.

Внутренняя связность характеризуется следующим фактом: для того чтобы направление v^i переносилось параллельно во внутренней связности, необходимо и достаточно, чтобы направляющий круг семейства опорных кругов этих направлений проходил через нормализующую точку.

Вследствие этого: геодезическая внутренней связности есть такая линия, круг кривизны которой в каждой ее точке x проходит через соответствующую нормализующую точку X , иначе говоря: поле геодезических линий внутренней связности характеризуется тем, что круги кривизны всех его линий, проходящих через данную точку, пересекаются еще во второй точке, которая совпадает с нормализующей.

Поля линий, обладающие этим свойством, были рассмотрены мной в работе (2) и названы геодеоидными. Вторую точку пересечения кругов кривизны линий геодеоидного поля, проходящих через точку x , мы будем называть присоединенной этой точке.

Называя конформной интерпретацией геометрии Вейля построение такого соответствия $x \rightarrow X$, для которого эта геометрия является внутренней, мы видим, что, отображая ее конформно на плоскость и строя геодеоидное семейство, соответствующее семейству геодезических линий, мы получаем соответствие $x \rightarrow X$. Таким образом, произвол интерпретации определяется произволом конформного отображения на плоскости, т. е. зависит от одной аналитической функции комплексного переменного.

Если внутренняя геометрия задана в тех специальных изотермических координатах, которые соответствуют декартовым координатам плоскости интерпретации так, что

$$u^1=x, \quad u^2=y, \quad g_{11}=g_{21}=1, \quad g_{12}=0,$$

то зависимости между декартовыми координатами x, y точки x и ξ, η точки X определяются так:

$$\xi=x-2\frac{l_1}{l_1^2+l_2^2}, \quad \eta=y-2\frac{l_2}{l_1^2+l_2^2}. \quad (11)$$

Известно, что параметр Либмана или конформная дуга σ кривой характеризуется соотношением

$$d\sigma^2=dk\,ds, \quad (12)$$

где s — евклидова дуга, k — кривизна, и остается неизменным при преобразованиях группы Мебиуса. Для линий геодезического семейства, соответствующего семейству геодезических линий внутренней связности,

$$d\sigma^2=q_{ij}du^i du^j, \quad (13)$$

где

$$q_{ij}=p_{k(i}g_{j)}^k, \quad (14)$$

или

$$\frac{dk}{ds}=\frac{q_{ij}du^i du^j}{g_{kl}du^k du^l}, \quad (15)$$

где g_{ij} есть метрический тензор плоскости интерпретации.

Назовем стационарными те направления, для которых $dk/ds=0$, т. е. направления, касательные к линиям плоскости, изображающим геодезические внутренней связности и имеющим в данной точке вершину. Стационарные линии образуют сеть и определяются уравнением

$$q_{ij}du^i du^j=0. \quad (16)$$

Для того чтобы стационарная линия была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы она была окружностью.

Перейдем к рассмотрению различных частных видов связностей Вейля и их интерпретаций.

1. Риманова геометрия характеризуется тем, что вектор C_i градиентен или, вследствие (4, В), условием

$$P_{[i,j]}=0, \quad (17)$$

которое равносильно следующему:

$$g^{ij}q_{ij}=0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что риманова геометрия характеризуется тем, что при ее конформной интерпретации стационарные направления взаимно ортогональны в каждой точке.

2. Квазиевклидова геометрия, т. е. такая, аффинная связность которой допускает абсолютный параллелизм направлений, является частным случаем геометрии Вейля. Она характеризуется любым из трех следующих условий:

$$R_{[i,j]}=0, \quad g^{ij}p_{ij}=0, \quad p_{k[i}g_{j]}^k=0. \quad (19)$$

Ее геодезические линии отображаются на ∞^1 семейств изогональных траекторий произвольного однопараметрического семейства линий плоскости; направление касательной к линиям каждого из этих семейств соответствует абсолютно параллельным направлениям связности. Соответствие $x \rightarrow X$ можно получить в этом случае, приняв за X точку пересечения кругов кривизны двух линий произвольной ортогональной сети плоскости, пересекающихся в точке x .

3. Евклидова внутренняя геометрия характеризуется каждым из двух следующих условий:

- а) Соответствие $x \rightarrow X$ конформное первого рода;
- б) X есть точка пересечения кругов кривизны двух линий изотермической сети, проходящих через точку x .

4. Назовем соответствие $x \rightarrow X$ изотропным, если при отображении ее геодезических линий на плоскости dk/ds не зависит от направления геодезической.

Условие этого будет иметь вид

$$p_{(ij)} = \lambda g_{ij} \quad (20)$$

или

$$R_{ji} = p_{ij}, \quad (21)$$

а внутренняя связность характеризуется соотношением

$$\nabla_{[k} R_{j]i} = 0. \quad (22)$$

Для того чтобы соответствие $x \rightarrow X$ было изотропным, необходимо и достаточно, чтобы оно было конформным 2-го рода. В специальной изотермической системе координат, соответствующих декартовым координатам плоскости, величины, определяющие внутреннюю геометрию изотропного соответствия, имеют вид:

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad l_1 = \frac{2(x - U)}{V(x - U)^2 + (y + V)^2},$$

$$l_2 = \frac{2(y + V)}{V(x - U)^2 + (y + V)^2},$$

где U и V — сопряженно-гармонические функции.

5. Для того чтобы внутренняя геометрия изотропного соответствия $x \rightarrow X$ была римановой, необходимо и достаточно, чтобы она сводилась к инверсии относительно некоторого круга A .

Гауссова кривизна этой геометрии постоянна и будет положительна, отрицательна или равна нулю в зависимости от того, будет ли круг A мнимым, действительным или выродится в точку. В последнем случае эта точка будет соответствовать всем точкам x . В общем случае геодезические линии будут изображаться кругами, ортогональными A , а интерпретация совпадает с конформной интерпретацией пространств постоянной кривизны.

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии Наук СССР

Поступило
29 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Норден, ДАН, 61, № 2 (1948). ² А. Норден, ДАН, 58, № 7 (1946).