

Б. Н. ГАРТШТЕЙН

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ДЛЯ РАНГА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 IV 1948)

Пусть случайные величины конечной последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$.

Рангом называется случайная величина $\rho_n = \zeta_n - \eta_n$, где

$$\zeta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \eta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

В последнее время появилось значительное число работ, посвященных предельному распределению ранга в некоторых частных случаях (см., например, ^(1,2)), дальнейшие литературные указания см. ⁽¹⁾). Целью нашей работы является получение несколько более общих результатов в том же направлении.

Обозначим через $\Phi_n(r)$ функцию распределения величины ρ_n . Допустим, что при надлежаще подобранных постоянных $a_n > 0$ и b_n и $n \rightarrow \infty$ функции $\Phi_n(a_n u + b_n)$ сходятся к некоторой собственной* функции распределения $\Phi(u)$. Наша задача состоит в определении вида возможных предельных в указанном смысле функций $\Phi(u)$. Эта задача решена нами при некоторых ограничениях, наложенных на начальную функцию распределения $F(x)$ величин ξ_k .

Прежде всего мы предполагаем, что $F(x)$ непрерывна. Другое ограничение нам потребуется при формулировке теоремы 2.

Из очевидного равенства

$$\begin{aligned} P\{\zeta_n < z, \eta_n < y\} &= P\{\zeta_n < z\} - P\{\zeta_n < z, \eta_n > y\} = \\ &= F^n(z) - [F(z) - F(y)]^n \end{aligned}$$

находим, что

$$\Phi_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{y+z} n(n-1)[F(z) - F(y)]^{n-2} dF(z) dF(y).$$

Отсюда после интегрирования

$$\Phi_n(r) = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(z+r) - F(z)]^{n-1} dF(z).$$

* Т. е. отличной от несобственной функции распределения

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 0 & \text{для } u \leq a, \\ 1 & \text{для } u > a, \end{cases} \text{ где } a - \text{постоянное.}$$

Обозначим через $\Phi_M^{(n)}(z)$ функцию распределения величины ζ_n , через $\Phi_{-m}^{(n)}(y)$ — функцию распределения величины $-\eta_n$ и через $\Psi_n(r)$ — композицию функций $\Phi_M^{(n)}(z)$ и $\Phi_{-m}^{(n)}(y)$, т. е.

$$\Psi_n(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_M^{(n)}(r-y) d\Phi_{-m}^{(n)}(y).$$

Известно, что $\Phi_M^{(n)}(z) = F^n(z)$ и $\Phi_{-m}^{(n)}(y) = [1 - F(-y)]^n$, откуда

$$\begin{aligned} \Psi_n(r) &= F^n(r) \cdot [1 - F(-r)]^n = \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} F^n(r-y) [1 - F(-y)]^{n-1} dF(-y) = \\ &= n \int_{-\infty}^{\infty} F^n(r+x) [1 - F(x)]^{n-1} dF(x). \end{aligned}$$

Теорема 1. Для того чтобы при надлежащем подборе постоянных $a_n > 0$ и b_n функции $\Phi_n(a_n u + b_n)$ сходились при $n \rightarrow \infty$ к некоторой собственной функции распределения $\Phi(u)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Psi_n(a_n u + b_n)$ сходились при тех же $a_n > 0$ и b_n к некоторой собственной функции распределения. При этом обе предельные функции совпадают.

Наложим теперь на начальную функцию $F(x)$ дополнительное ограничение, а именно, предположим, что $F(x)$ такова, что предельные распределения максимального ζ_n и минимального члена η_n существуют.

В работе (3) показано, что класс законов, предельных для $\Phi_M^{(n)}(a_n u + b_n)$ (при $n \rightarrow \infty$), где $a_n > 0$ и b_n — надлежащим образом подобранные постоянные, состоит из законов следующих трех типов:

- 1) $\Phi_\alpha(u) = \begin{cases} 0 & \text{для } u \leq 0, \\ e^{-u^{-\alpha}} & \text{для } u > 0; \end{cases}$
- 2) $\Psi_\alpha(u) = \begin{cases} e^{-(-u)^\alpha} & \text{для } u \leq 0, \\ 1 & \text{для } u > 0; \end{cases}$
- 3) $\lambda(u) = e^{-e^{-u}}$

α — положительная постоянная).

Очевидно, что класс законов, предельных для функции $\Phi_{-m}^{(n)}(a_n u + b_n)$, где $a_n > 0$ и b_n — надлежащим образом подобранные постоянные, состоит из законов тех же трех типов, так как если $\eta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, то $-\eta_n = \max(-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n)$.

Для определения класса возможных предельных распределений ранга необходимо следующее предложение, дающее оценку порядка роста величин a_n .

Лемма. Если при некотором подборе постоянных $a_n > 0$ и b_n $\Phi_M^{(n)}(a_n u + b_n)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к собственному предельному закону, то при любом $\varepsilon > 0$ и $n \rightarrow \infty$

- 1) в случае $\Phi(u) = \Phi_\alpha(u)$ имеем $a_n n^{-\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \rightarrow \infty$ и $a_n n^{-\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \rightarrow 0$;
- 2) в случае $\Phi(u) = \Psi_\alpha(u)$ имеем $a_n n^{\frac{1}{\alpha} + \varepsilon} \rightarrow \infty$ и $a_n n^{\frac{1}{\alpha} - \varepsilon} \rightarrow 0$;
- 3) в случае $\Phi(u) = \lambda(u)$ имеем $a_n n^\varepsilon \rightarrow \infty$ и $a_n n^{-\varepsilon} \rightarrow 0$.

На основании этой леммы доказывается

Теорема 2. *Класс возможных предельных законов для композиций функций распределения максимального и минимального членов состоит из законов следующих шести типов:*

$$\Phi_a(u), \quad \Psi_a(u), \quad \lambda(u), \quad \Phi_a(u) \cdot \Phi_a(au), \quad \Psi_a(u) \cdot \Psi_a(au), \quad \lambda(u) \cdot \lambda(au),$$

a — постоянное.

Непосредственным следствием теорем 1 и 2 является утверждение, что в наших предположениях предельное распределение ранга может принадлежать лишь к одному из указанных шести типов.

Наши результаты вместе с § 6⁽³⁾ позволяют получить, в частности, результат Гумбеля⁽¹⁾.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Б. В. Гнеденко за постановку задачи и постоянную помощь при ее решении.

Львовский государственный университет
им. Ивана Франко

Поступило
1 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. J. Gumbel, Ann. Math. Statistics, 18, No. 3, 384 (1947). ² G. Elfvig, Biometrika, 35, 111 (1947). ³ B. Gnedenko, Ann. Math., 44, No. 3, 423 (1943).