

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В ИНТЕГРАЛ
ПО ФУНКЦИЯМ МАКДОНАЛЬДА С КОМПЛЕКСНЫМ ЗНАЧКОМ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 11 V 1947)

В настоящей работе устанавливается справедливость теоремы типа интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mu K_{\mu}(x) d\mu \int_0^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} I_{\mu}(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $I_{\mu}(x)$, $K_{\mu}(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента с комплексным значком $\mu = \sigma + i\tau$, $x > 0$, $\sigma > 1$.

Теорема справедлива для произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям*:

I. $f(x)$ имеет ограниченную вариацию во всяком конечном интервале (a, A) , $0 < a < A$. II. $\frac{1}{x} f(x) I_{\sigma}(x) \in L(0, \infty)$.

В точках разрыва $f(x)$ заменяется, как обычно, полусуммой $^{1/2} [f(x+0) + f(x-0)]$. Если положить

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} I_{\mu}(\xi) d\xi = F(\mu) \quad (\mu = \sigma + i\tau), \quad (2)$$

то теорема (1) может быть записана в виде формулы обращения

$$f(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mu F(\mu) K_{\mu}(x) d\mu \quad (x > 0). \quad (3)$$

Формулы обращения, содержащие интегрирование по индексу цилиндрических функций, рассматривались автором и М. И. Конторовичем^(1,2). Предположение о существовании рассматриваемой модификации этих формул было высказано Г. А. Гринбергом⁽³⁾.

Для доказательства заметим, что интеграл (2) сходится абсолютно и равномерно относительно τ во всяком конечном промежутке $(-T, T)$.

На основании оценки

$$|I_{\mu}(x)| \leq \frac{\Gamma(\sigma + 1/2)}{|\Gamma(\sigma + 1/2 + i\tau)|} I_{\sigma}(x) \quad (4)$$

следует, что $F(\mu) = F(\sigma + i\tau)$ представляет непрерывную функцию τ в промежутке $(-T, T)$, и интеграл

$$J(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \mu F(\mu) K_{\mu}(x) d\mu \quad (x > 0) \quad (5)$$

имеет определенный смысл.

Доказательство теоремы (1) сводится к доказательству, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J(x) = f(x). \quad (6)$$

* Эти условия могут быть несколько расширены.

Чтобы вычислить рассматриваемый предел, заменим в (5) F интегралом (2) и изменим порядок интегрирования, что законно ввиду доказанной равномерной сходимости. Мы получим тогда:

$$J(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \mu I_{\mu}(\xi) K_{\mu}(x) d\mu, \quad (7)$$

или, если положить $\xi = xe^{\theta}$,

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{\theta}) G_T(\theta) d\theta, \quad (8)$$

$$G_T(\theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \mu I_{\mu}(xe^{\theta}) K_{\mu}(x) d\mu. \quad (9)$$

Дальнейшие рассуждения основываются на интегральном представлении (4)

$$I_{\mu}(xe^{\theta}) K_{\mu}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu s} J_0(xe^{\theta/2}\psi) ds, \quad (10)$$

$\psi = (2\cosh s - 2\cosh \theta)^{1/2}$, $-\infty < \theta < \infty$, $R(\mu) > -1/4$, $J_0(x)$ — функция Бесселя. Легко видеть, что интеграл (10) сходится равномерно относительно μ , поэтому можно, заменив произведение цилиндрических функций в (9) интегралом (10), переставить порядок интегрирования. Тогда

$$\begin{aligned} G_T &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(xe^{\theta/2}\psi) ds \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \mu e^{-\mu s} d\mu = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J_0(xe^{\theta/2}\psi) \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{-\sigma s} \frac{\sin sT}{s} \right) ds = \frac{1}{\pi} e^{\sigma\theta} \frac{\sin T\theta}{\theta} + R_T(\theta), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_T = -\frac{xe^{\theta/2}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sigma s} \frac{\sinh s}{s} \sin sT \frac{J_1(xe^{\theta/2}\psi)}{\psi} ds, \quad (12)$$

$J_1(x)$ — функция Бесселя.

Фундаментальное значение этого результата делается очевидным, если принять во внимание, что, по формуле Дирихле,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^{\theta}) e^{\sigma\theta} \frac{\sin T\theta}{\theta} d\theta = f(x), \quad (13)$$

так как из условий, наложенных на функцию $f(x)$, следует, что $f(xe^{\theta}) e^{\sigma\theta}$ имеет ограниченную вариацию во всяком конечном промежутке $(-\omega, \omega)$ и $f(xe^{\theta}) e^{\sigma\theta} \in L(-\infty, \infty)$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^{\theta}) R_T d\theta = 0. \quad (14)$$

Чтобы оценить поведение R_T при больших T , преобразуем выражение (12) при помощи интегрирования по частям, что дает

$$R_T = -\frac{xe^{\theta/2}}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} xe^{(\sigma+1/2)\theta} \frac{\text{sh } \theta}{\theta} \cos T\theta + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma s} \text{ch } s \cos Ts \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{\text{th } s}{s^2} - \sigma \frac{\text{th } s}{s} \right) \frac{J_1(xe^{\theta/2}\psi)}{\psi} - xe^{\theta/2} \frac{\text{th } s}{s} \frac{\text{sh } s}{\psi^2} J_2(xe^{\theta/2}\psi) \right] ds \right\}. \quad (15)$$

Условимся в дальнейшем обозначать через $A_1, A_2, \dots$ и $M_1(x), M_2(x), \dots$ величины, которые при фиксированном σ являются соответственно абсолютными постоянными и ограниченными функциями от x ($x > 0$). Пусть $\theta \leq 0$, так что ψ вещественно.

Принимая во внимание ограниченности функций $e^{\theta} \frac{\text{sh } \theta}{\theta}$, $e^{-\sigma} \text{ch } s$, $\frac{1}{s} - \frac{\text{th } s}{s^2}$, $\frac{\text{th } s}{s}$, $\frac{J_1(xe^{\theta/2}\psi)}{xe^{\theta/2}\psi}$, $J_2(xe^{\theta/2}\psi)$, $\frac{J_2(xe^{\theta/2}\psi)}{x^2e^{\theta}\psi^2}$, $\frac{e^{\sigma\theta}}{I_{\sigma}(xe^{\theta})}$, имеем*

$$|R_T|_{\theta \leq 0} \leq \frac{A_1 x^2 e^{\sigma\theta}}{T} + \frac{xe^{\theta/2}}{T} \int_{-\theta}^{\infty} e^{-(\sigma+1)s} [A_2 xe^{\theta/2} + A_3 xe^{\theta/2} + A_4 x^3 e^{\theta/2}] ds = \frac{A_5 x^2 + A_6 x^4}{T} e^{\sigma\theta} \leq \frac{M_1(x)}{T} I_{\sigma}(xe^{\theta}). \quad (16)$$

Положим теперь $\theta > 0$; тогда ψ вещественно при $s \geq \theta$ и имеет чисто мнимое значение $\psi = i\psi_1$, $\psi_1 = (2\text{ch } \theta - 2\text{ch } s)^{1/2}$ при $-\theta \leq s \leq \theta$. Соответственно этому представим R_T в виде

$$R_{T\theta > 0} = R_1 + R_2, \quad (17)$$

$$R_1 = -\frac{xe^{\theta/2}}{\pi T} \left\{ \frac{1}{2} xe^{(\sigma+1/2)\theta} \frac{\text{sh } \theta}{\theta} \cos T\theta + \int_{\theta}^{\infty} e^{-\sigma s} \text{ch } s \cos Ts \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{\text{th } s}{s^2} - \sigma \frac{\text{th } s}{s} \right) \frac{J_1(xe^{\theta/2}\psi)}{\psi} - xe^{\theta/2} \frac{\text{th } s}{s} \frac{\text{sh } s}{\psi^2} J_2(xe^{\theta/2}\psi) \right] ds \right\}, \quad (18)$$

$$R_2 = -\frac{xe^{\theta/2}}{\pi T} \int_{-\theta}^{\infty} e^{-\sigma s} \text{ch } s \cos Ts \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{\text{th } s}{s^2} - \sigma \frac{\text{th } s}{s} \right) \frac{I_1(xe^{\theta/2}\psi_1)}{\psi_1} - xe^{\theta/2} \frac{\text{th } s}{s} \frac{\text{sh } s}{\psi_1^2} I_2(xe^{\theta/2}\psi_1) \right] ds. \quad (19)$$

Так же как и выше имеем

$$|R_1| \leq \frac{M_2(x)}{T} I_{\sigma}(xe^{\theta}). \quad (20)$$

Оценка R_2 представляет наибольшие трудности. Мы имеем

$$|R_2| \leq \frac{A_7 x e^{\theta/2}}{T} \int_0^{\theta} e^{(\sigma+1)s} \frac{I_1(xe^{\theta/2}\psi_1)}{\psi_1} ds + \frac{A_8 x^2 e^{\theta}}{T} \int_0^{\theta} e^{(\sigma+1)s} \frac{\text{sh } s}{\psi_1^2} I_2(xe^{\theta/2}\psi_1) ds = Q_1 + Q_2. \quad (21)$$

* Полезно иметь в виду тождество

$$\frac{\text{sh } s}{\psi^2} J_2(xe^{\theta/2}\psi) = \frac{1}{2} J_2(xe^{\theta/2}\psi) + x^2 e^{\theta} (\text{ch } \theta - e^{-\sigma}) \frac{J_2(xe^{\theta/2}\psi)}{x^2 e^{\theta} \psi^2}.$$

Разбивая в Q_1 промежуток интегрирования на промежутки $(0, \varepsilon)$ и (ε, θ) , ε — произвольное фиксированное число, получаем:

$$Q_1 = \frac{A_7 x e^{\theta/2}}{T} \int_0^\varepsilon e^{(\sigma+1)s} \frac{I_1(x e^{\theta/2} \psi_1)}{\psi_1} ds + \\ + \frac{A_8 x e^{\theta/2}}{T} \int_\varepsilon^\theta e^{(\sigma+1)s} \frac{I_1(x e^{\theta/2} \psi_1)}{\psi_1} ds = Q_3 + Q_4. \quad (22)$$

Так как $\frac{I_1(x e^{\theta/2} \psi_1)}{\psi_1}$ достигает максимума на нижнем пределе, то

$$Q_3 \leq \frac{A_7 x e^{\theta/2}}{T} \frac{I_1\left(2x e^{\theta/2} \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}} \frac{e^{(\sigma+1)\varepsilon} - 1}{\sigma+1} \leq \frac{M_3(x)}{T} I_\sigma(x e^\theta). \quad (23)$$

Далее легко показать:

$$Q_4 \leq \frac{A_8(x)}{T} \operatorname{ch}^{\sigma+1} \theta \int_0^{\pi/2} \cos^{2\sigma+1} t I_1(x \sqrt{2e^\theta \operatorname{ch} \theta} \sin t) dt, \quad (24)$$

или, так как

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2\sigma+1} t I_1(z \sin t) dt = \frac{1}{z} \left[\frac{I_\sigma(z) \Gamma(\sigma+1)}{(z/2)^\sigma} - 1 \right], \quad (25)$$

$$Q_4 \leq \frac{A_{10}}{T x^\sigma} \frac{\operatorname{ch}^{\sigma+1} \theta}{(2e^\theta \operatorname{ch} \theta)^{\frac{\sigma+1}{2}}} \left[I_\sigma(x \sqrt{2e^\theta \operatorname{ch} \theta}) - \frac{x^\sigma (2e^\theta \operatorname{ch} \theta)^{\sigma/2}}{2^\sigma \Gamma(\sigma+1)} \right] \leq \frac{M_4(x)}{T} I_\sigma(x e^\theta). \quad (26)$$

Из (22), (23) и (26) следует, что

$$Q_1 \leq \frac{M_5(x)}{T} I_\sigma(x e^\theta). \quad (27)$$

Интегрируя по частям, легко находим

$$Q_2 = \frac{A_8 x e^{\theta/2}}{T} \left[\frac{I_1\left(2x e^{\theta/2} \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sh} \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} x e^{(\sigma+1/2)\theta} \right] + A_{11} Q_1 \leq \frac{M_6(x)}{T} I_\sigma(x e^\theta). \quad (28)$$

Из этих оценок непосредственно следует:

$$|R_T| \leq \frac{M(x)}{T} I_\sigma(x e^\theta) \quad (-\infty < \theta < \infty), \quad (29)$$

откуда вытекает существование предела (14). Теорема (1) доказана.

Ленинградский физико-технический институт
Академии Наук СССР

Поступило
11 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. И. Конторович и Н. Н. Лебедев, ЖЭТФ, 8, 1192 (1938); 9, 729 (1939).
² Н. Н. Лебедев, ДАН, 52, № 8, 661 (1946). ³ Г. А. Гринберг, ЖЭТФ, 10, 1087 (1940). ⁴ A. L. Dixon and W. L. Ferrar, Quarterly J. Math., 4, 193, 297 (1933).