

С. Н. ЧЕРНИКОВ

О ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ p -РАСШИРЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ p -ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 18 VI 1947)

Конечным p -расширением произвольной группы $\mathfrak{A}$ называется всякая группа $\mathfrak{B}$, обладающая изоморфизмом группы $\mathfrak{A}$ нормальным делителем $\mathfrak{A}$ с фактор-группой $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$, являющейся конечной p -группой. В настоящей статье устанавливаются некоторые свойства расширений такого рода в случае, когда $\mathfrak{A}$ является абелевой p -группой.

1. Теорема 1. *Если порядки элементов какого-нибудь конечного p -расширения бесконечной абелевой p -группы ограничены в совокупности, то центр этого расширения бесконечен.*

Доказательство. При условиях теоремы расширяемая абелева группа не может удовлетворять условию минимальности и, значит, ее конечное p -расширение не может быть специальной p -группой. Но тогда, ввиду теоремы 3 из (1), центр расширения не может быть конечным.

Теорема 2. *Если порядки элементов какого-нибудь конечного p -расширения $\mathfrak{B}$ произвольной абелевой p -группы ограничены в совокупности, то верхний центральный ряд группы $\mathfrak{B}$ должен быть конечным.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа, конечным p -расширением которой является группа $\mathfrak{B}$, и пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \dots + \mathfrak{A}_k \quad (1)$$

разложение группы $\mathfrak{B}$ в смежные классы по подгруппе $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{B}^*$ группу, порожденную элементами $P_1, P_2, \dots, P_k$. Эта группа будет конечной, так как группа $\mathfrak{B}$, как периодическая разрешимая группа, локально конечна. Порядок группы $\mathfrak{B}^*$ обозначим через p^n .

Если A — произвольный элемент группы $\mathfrak{A}$, то класс сопряженных с ним элементов группы $\mathfrak{B}$, очевидно, не может содержать элементов больше, чем содержится элементов в группе $\mathfrak{B}^*$, т. е. больше числа p^n , причем все сопряженные с A элементы будут перестановочными друг с другом, так как все они должны содержаться в абелевом нормальном делителе $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{B}$.

Обозначая через p^m наибольший из порядков элементов группы $\mathfrak{B}$, легко получить отсюда, что порядок группы $\mathfrak{B}_A$, порожденный элементами класса сопряженных с A элементов группы $\mathfrak{B}$, не может превзойти числа p^{mp^n} . Так как группа $\mathfrak{B}_A$ перестановочна с каждым элементом группы $\mathfrak{B}^*$, то группа $\mathfrak{B}_A$, порожденная элементами этих обеих групп, должна быть их произведением и, следовательно, порядок группы $\mathfrak{B}_A$ не превзойдет числа $r = p^n \cdot p^{mp^n} = p^{mp^n + n}$. Отсюда следует, что длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{B}_A$ — как конечная

p -группа она обладает таким рядом — не превзойдет числа $s = mp^n + n$. Но тогда каждый $(s+1)$ -членный коммутатор, составленный из элементов группы $\mathfrak{A}$, должен быть равным единице.

С другой стороны, так как группа $\mathfrak{F}/\mathfrak{A}$ есть конечная p -группа, то существует такое натуральное число a , что число p^a будет ее порядком. Но тогда верхний центральный ряд группы $\mathfrak{F}/\mathfrak{A}$ не может иметь длину, большую числа a , и, следовательно, всякий $(a+1)$ -членный коммутатор, составленный из элементов группы $\mathfrak{F}$, будет элементом группы $\mathfrak{A}$.

Ввиду этого всякий $(a+s+2)$ -членный коммутатор, составленный из элементов группы $\mathfrak{F}$, можно заменить $(s+1)$ -членным коммутатором, начинающимся некоторым элементом A' из группы $\mathfrak{A}$. Но в таком коммутаторе можно, не меняя его значения, заменить не содержащиеся в группе $\mathfrak{A}$ его элементы соответствующими им представителями $P_1, P_2, \dots, P_k$ смежных классов разложения (1). Коммутатор, появляющийся в результате этой замены, будет составлен из элементов группы $\mathfrak{A}'$ и, следовательно, будет равен единице, так как является $(s+1)$ -членным. Вместе с этим доказано, что всякий $(a+s+2)$ -членный коммутатор, составленный из элементов группы $\mathfrak{F}$, равен единице. Отсюда уже легко получить, что группа $\mathfrak{F}$ обладает верхним центральным рядом с длиной, не превосходящей числа $a+s+1$.

Примечание. Обычный коммутатор $[X_1, X_2] = X_1^{-1} X_2^{-1} X_1 X_2$ называется двучленным. Коммутатор $[[X_1, X_2], X_3]$ называется трехчленным и т. д.

Теорема 3. Если конечное p -расширение $\mathfrak{F}$ произвольной абелевой p -группы $\mathfrak{A}$ имеет верхний центральный ряд конечной длины, то порядки элементов фактор-группы группы $\mathfrak{F}$ по ее центру ограничены в совокупности.

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathfrak{Q}$, порожденную произвольным элементом P группы $\mathfrak{F}$ и произвольным элементом P^* группы $\mathfrak{F}^*$, определенной выше. Группа $\mathfrak{Q}$, будучи подгруппой группы $\mathfrak{F}$, обладает верхним центральным рядом конечной длины. Так как степень P^{p^n} (p^n — порядок группы $\mathfrak{F}^*$) содержится в центре группы $\mathfrak{Q}$, то, ввиду теоремы 3 из (2), в центре группы $\mathfrak{Q}$ содержится также степень $P^{p^n(c'-1)}$, если c' — длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{Q}$, и, значит, степень $P^{p^n(c-1)}$, если c — длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{F}$. Но, ввиду определения группы $\mathfrak{F}^*$, это значит, что степень $P^{p^n(c-1)}$ каждого элемента группы $\mathfrak{F}$ содержится в центре этой группы. Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает:

Теорема 4. Если конечное p -расширение $\mathfrak{F}$ произвольной бесконечной абелевой p -группы обладает верхним центральным рядом конечной длины, то все факторы этого ряда, за исключением, может быть, первого, являются прямыми произведениями циклических групп ограниченного в совокупности порядка.

2. Теорема 5. Центр каждого конечного p -расширения $\mathfrak{F}$ произвольной абелевой p -группы $\mathfrak{A}$, обладающей бесконечным множеством элементов p -го порядка, содержит бесконечно много элементов p -го порядка.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}^*$ — группа, порожденная элементами p -го порядка группы $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{F}^*$ — определенная выше группа, то произведение $\mathfrak{A}^* \mathfrak{F}^*$ удовлетворяет условиям теоремы 1, так как группа $\mathfrak{F}^*$ — конечная p -группа (см. (2)). Следовательно, центр группы $\mathfrak{A}^* \mathfrak{F}^*$ бесконечен, а следовательно, бесконечно и его пересечение с подгруппой $\mathfrak{A}^*$, имеющей конечный индекс в группе $\mathfrak{A}^* \mathfrak{F}^*$. Так как все

отличные от единицы элементы группы $\mathfrak{A}^*$ имеют p -й порядок, то теорема доказана.

Теорема 6. Каждая p -группа $\mathfrak{F}$, обладающая возрастающим центральным рядом и удовлетворяющая условию минимальности по нормальным делителям конечного индекса, является конечным p -расширением прямого произведения примарных абелевых групп типа p^∞ .

Доказательство. Из условия минимальности по нормальным делителям конечного индекса вытекает существование у группы $\mathfrak{F}$ нормального делителя конечного индекса $\mathfrak{A}$, не содержащего отличных от него нормальных делителей группы $\mathfrak{F}$, имеющих в $\mathfrak{F}$ конечный индекс. Опираясь на теорему Пуанкаре о подгруппах конечного индекса, легко установить, что группа $\mathfrak{A}$ не имеет истинных подгрупп конечного индекса. Но тогда группа $\mathfrak{A}$, будучи p -группой, обладающей возрастающим центральным рядом, должна быть полной абелевой группой (см. (2)) и, значит, прямым произведением примарных абелевых групп типа p^∞ (см. (4)). Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 вытекает

Теорема 7. Если центр p -группы $\mathfrak{F}$, обладающей возрастающим центральным рядом и удовлетворяющей условию минимальности по нормальным делителям конечного индекса, содержит лишь конечное множество элементов p -го порядка, то группа $\mathfrak{F}$ специальная.

Действительно, при условиях теоремы группа $\mathfrak{F}$ не может быть, ввиду теоремы 5, конечным p -расширением бесконечного прямого произведения примарных абелевых групп типа p^∞ и, значит, ввиду теоремы 6, будет конечным p -расширением конечного произведения такого рода и, следовательно, специальной группой (см. (5)).

Теорема 7 может быть сформулирована в следующей равносильной форме.

Теорема 8. Каждая p -группа, обладающая возрастающим центральным рядом и удовлетворяющая условию минимальности по абелевым нормальным делителям и нормальным делителям конечного индекса, является специальной группой.

Из этой теоремы легко получается

Теорема 9. Каждая локально конечная p -группа $\mathfrak{F}$, удовлетворяющая условию минимальности по нормальным делителям, является специальной группой.

Доказательство. Будучи локально специальной, группа $\mathfrak{F}$ обладает центральным множеством (см. (6)) и, значит, ввиду условий минимальности по нормальным делителям, — возрастающим центральным рядом. Но тогда группа $\mathfrak{F}$ должна удовлетворять условиям предыдущей теоремы и, следовательно, будет специальной.

Так как каждая специальная группа удовлетворяет условиям минимальности по произвольным подгруппам, то отсюда вытекает

Следствие. Если локально конечная p -группа удовлетворяет условию минимальности по нормальным делителям, то она удовлетворяет и условию минимальности по произвольным подгруппам.

Для случая счетной локально конечной p -группы это предложение содержится в (7).

Поступило
1 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Н. Черников, Математ. сб., 17 (59), 105 (1945). ² С. Н. Черников, Математ. сб., 18 (60), 397 (1946). ³ С. Н. Черников, Математ. сб., 7 (49), 35 (1940). ⁴ А. Г. Курош, Теория групп, 1944. ⁵ С. Н. Черников, Математ. сб., 7 (49), 539 (1940). ⁶ С. Н. Черников, Математ. сб., 13 (55), 317 (1943). ⁷ И. Д. Адо, ДАН, 54, № 6 (1946).