

И. А. ВИЛЬНЕР

НОМОГРАММЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 V 1947)

§ 1. В работе автора ⁽¹⁾ определены параметры

$$\Delta_1 = \frac{\tau_1 \tau_2 [\ln(\tau_1/\tau_2)]_y + \tau_1 [\ln \tau_2]_x - \tau_2 [\ln \tau_1]_x}{\tau_2 - \tau_1},$$

$$\Delta_2 = \frac{[\ln(\tau_2/\tau_1)]_x + \tau_1 [\ln \tau_1]_y - \tau_2 [\ln \tau_2]_y}{\tau_2 - \tau_1},$$

$$\text{где } \tau_1 = \frac{\partial f_1(x, y, z_1)/\partial x}{\partial f_1(x, y, z_1)/\partial y} = \frac{f_{1x}}{f_{1y}}, \quad \tau_2 = \frac{\partial f_2(x, y, z_2)/\partial x}{\partial f_2(x, y, z_2)/\partial y} = \frac{f_{2x}}{f_{2y}}.$$

Как показано в ⁽¹⁾, два условия $\Delta_{1y} = 0$, $\Delta_{2x} = 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы система уравнений $f_1(x, y, z_1) = 0$, $f_2(x, y, z_2) = 0$, удовлетворяющая требованиям $f_{1x}f_{1y}f_{2x}f_{2y} \neq 0$ и $D(f_1, f_2)/D(x, y) \neq 0$, допускала номограмму из выравненных точек на четырех шкалах x, y, z_1, z_2 при двух заведомо прямолинейных шкалах x и y . Параметры Δ_1 и Δ_2 являются проективно-дифференциальными инвариантами Гурса—Пенлеве преобразования номограммы.

Такую систему мы будем называть системой первого номографического класса, а все остальные номографируемые системы, т. е. системы, допускающие номограмму на четырех шкалах x, y, z_1, z_2 с одним выравниванием, причем среди этих шкал имеется не менее трех криволинейных, будем называть системами второго номографического класса. Каноническое представление (3,1) ^(2,3) системы первого класса с прямолинейными шкалами x и y может быть дано либо методом, указанным в ⁽¹⁾, § 1, либо по методу, аналогичному методу Massau-Lecornu ⁽⁴⁾ (1884), либо по бесквадратурному методу, аналогичному методу Gronwall'a ⁽⁵⁾ (1912), либо так, как это сделано в § 3 настоящей работы (две квадратуры).

§ 2. Автор развил в 1944 г. * весьма общий „метод бинарных полей“ ⁽⁶⁾, который позволяет применять принцип выравненных точек д'Окая к самым произвольным системам уравнений и, в частности, к одному уравнению. Если в определителях Massau (4,2) считать $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ произвольно заданными функциями, вообще говоря, двух переменных x и y , то, задавая две произвольные функции этих же переменных ξ_1 и η_1 , придем к теореме о возможности замены двух произвольных бинарных полей и, в частности, двух шкал x и y двумя другими бинарными полями (x, y) („принцип замены“).

Вместе с данной парой бинарных полей (в частности шкал) опре-

* Доложено в июле 1944 г. в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

деляется порожаемое этой парой полей или шкал множество эквивалентных пар бинарных полей, зависящее от двух произвольных функций двух переменных ξ_3, η_3 , все соответственные точки (x, y) которых лежат на одной прямой.

Если из $\xi_3, \eta_3, \eta_3, \eta_3$ исключить x и y с помощью заданной системы уравнений ($D(z_1, z_2)/D(x, y) \neq 0$), то получим множество эквивалентных номограмм со множеством эквивалентных бинарных полей (z_1, z_2) (а не (x, y)) и с двумя основными общими бинарными полями (x, y) , разрешающих данную систему; в частности, разрешающих одно уравнение $f_1(x, y, z_1)=0$ с помощью произвольного присоединенного второго уравнения $f_2(x, y, z_2)=0$ (в частности при $f_{2x}=0$, либо $f_{2y}=0$) („принцип присоединенного соотношения“).

Так как два бинарных поля каждой пары геометрически независимы, то можно исключить одно из них, заменив его соответственно усложненным ключом пользования. Так, в 1944 г. автор, отправляясь от проективного принципа д'Оканя и этих соображений, пришел к метрическому циркульным и транспарантным номограммам для произвольной системы (в частности, для одного уравнения), только с одним, а не двумя бинарными полями ⁽⁶⁾.

Система (в частности одно уравнение, если взять присоединенные в виде $f_2(x, z_2)=0$, либо $f_2(y, z_2)=0$) будет номографируема методом д'Оканя, если в множестве эквивалентных бинарных полей (z_1, z_2) найдутся два поля (z_1, z_2) , вырождающихся, соответственно, в шкалы z_1 и z_2 (задача Rybner'a ⁽⁸⁾ и, соответственно, задача Gronwall'a ⁽⁵⁾).

Полагая $v = \frac{\psi_2 \varphi_1 - \varphi_2 \psi_1}{\varphi_1 - \varphi_2}$, $u = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$, $\xi_3 = \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}}$, $\eta_3 = \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}}$, получим из этого условия уравнения двух инвариантных бинарных полей, так как уравнения

$$\bar{x}_{(1)} = -\frac{v_{z_2}}{u_{z_2}}, \quad \bar{y}_{(1)} = -u \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} + v, \quad \bar{x}_{(2)} = -\frac{v_{z_1}}{u_{z_1}}, \quad \bar{y}_{(2)} = -u \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} + v \quad (2,1)$$

не зависят от той пары множества эквивалентных пар бинарных полей (z_1, z_2) , которая использована для определения уравнений (2,1) двух инвариантных бинарных полей.

Когда прямолинейный индекс, проходящий через все точки (z_1, z_2) множества эквивалентных полей, перемещается так, что меняется только z_2 (только z_1), то индекс, огибая кривую z_1 первого инвариантного поля (соответственно, кривую z_2 второго инвариантного поля), постоянно касается кривой z_1 первого инвариантного поля в переменной точке z_2 (соответственно, постоянно касается кривой z_2 второго инвариантного поля в переменной точке z_1)^{*}.

Необходимое и достаточное условие номографируемости данной системы в смысле § 1 будет:

$$(v_{z_2}/u_{z_2})_{z_1}=0, \quad (v_{z_1}/u_{z_1})_{z_2}=0, \quad \varphi_{1y}=\psi_{1y}=\varphi_{2x}=\psi_{2x}=0. \quad (2,2)$$

Мы получаем новый подход к классической задаче Gronwall'a, присоединив к уравнению $f_1(x, y, z_1)=0$ зависимость $f_2(x, z_2)=0$, либо $f_2(y, z_2)=0$.

В § 3 мы получаем новое решение задачи о зависимостях первого класса, положив в (2,1) и (2,2) $\varphi_2 = \psi_1 = 0$, $\varphi_1 = 1/X(x)$, $\psi_2 = -1/Y(y)$,

* Кроме того, кривые инвариантных полей определенным образом касаются соответствующих кривых всех эквивалентных пар полей и, в частности, кривых тех двух основных полей, с помощью которых построено множество эквивалентных пар бинарных полей. Отмечаемые геометрические свойства основных, эквивалентных и инвариантных полей и их уравнения не зависят от данной системы уравнений, так как ее может и не быть. Это связано с касательными преобразованиями.

$u = -X(x)/Y(y)$, $v = -1/Y(y)$, где $X = X(x)$, $Y = Y(y)$ — прямолинейные характеристики ⁽⁷⁾ системы первого класса.

§ 3. Полагая: $\rho_1 = \ln \tau_1$, $\rho_2 = \ln \tau_2$, $\bar{\rho}_1 = \ln \bar{\tau}_1$, $\bar{\rho}_2 = \ln \bar{\tau}_2$,

$$\begin{aligned} \text{где } \tau_2 &= z_{1x}/z_{iy} \quad (i=1,2), \quad \tau_1 = x_{z_1}/x_{z_2}, \quad \bar{\tau}_2 = y_{z_1}/y_{z_2}, \quad S = \int_{z_1}^{z_1} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1} dz_1 = \\ &= \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{10})}, \quad t = - \int_{z_2}^{z_2} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_2} dz_2 = \bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{20})}, \\ l &= \int_x^x (\rho_1 - S)_x dx = \int_x^x (\rho_2 - t)_x dx = \left[\rho_1 - \int_{z_1}^{z_1} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1} dz_1 \right]_x = \\ &= \left[\rho_2 + \int_{z_2}^{z_2} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_2} dz_2 \right]_x = \left[\rho_2 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{10})} \right]_{z_2} - \left[\rho_2 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{20})} \right]_{x_0}, \\ m &= \int_y^y (\rho_2 - t)_y dy = \int_y^y (\rho_1 - S)_y dy = \left[\rho_1 - \int_{z_1}^{z_1} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1} dz_1 \right]_y = \\ &= \left[\rho_2 + \int_{z_2}^{z_2} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_2} dz_2 \right]_y = \left[\rho_1 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{20})} \right] - \left[\rho_1 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{30})} \right]_{(y_0)}, \end{aligned}$$

получим необходимое и достаточное условие того, что данная система первого класса — с прямолинейными шкалами для переменных x и y : либо

$$(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1 z_2} = 0, \quad \left[\rho_2 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{10})} \right]_{xy} = \left[\rho_1 - \int_{z_1}^{z_1} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1} dz_1 \right]_{xy} = 0,$$

либо

$$(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_1 z_2} = 0, \quad \left[\rho_2 + \int_{z_2}^{z_2} (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{z_2} dz_2 \right]_{xy} = \left[\rho_1 - (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)_{(z_{20})} \right]_{xy} = 0.$$

Обе формы условий эквивалентны. Называя каноническим представлением ⁽⁷⁾ системы первого класса два совместных определителя Massau (4,2), которым надлежащим проективным преобразованием можем придать вид ⁽⁷⁾:

$$S(z_1)X(x) + Y(y) + H(z_1) = 0, \quad T(z_2)X(x) + Y(y) + R(z_2) = 0, \quad (3,1)$$

найдем $X(x) = \int e^l dx$, $Y(y) = \int e^{-m} dy$, $S(z_1) = e^s$, $T(z_2) = e^t$, после чего H и R определяются с помощью заданной системы без квадратур (можно, следуя указаниям § 1, исключить и эти две).

С большим удобством этот результат применяется к уже решенной в ⁽⁷⁾ задаче об аналитических зависимостях первого класса.

Если ввести Δ_1 и Δ_2 (§ 1), то придем к результатам автора ⁽¹⁾.

§ 4. Перейдем к приложениям § 2 к номографируемому (§ 1) системам вообще (задача Рыбнер'а ⁽⁸⁾) при условии $D(z_1, z_2)/D(x, y) \neq 0$ и $f_{1x}f_{1y}f_{2x}f_{2y} \neq 0$.

Теорема. Для того чтобы данная система была номографируема, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$-\Delta_1 = [\ln(\Delta_{2x} - 2\Delta_{1y})], \quad \Delta_2 = [\ln(2\Delta_{2x} - \Delta_{1y})]_y, \quad (4,1)$$

причем, если первая или вторая, или одновременно обе круглые скобки обращаются тождественно в нуль*, то соответственно шкалы x или y или обе одновременно будут прямолинейными и (4,1) сведется, очевидно, к критерию автора, рассмотренному в § 1:

* Мы будем условно считать, что в этом случае соответствующее уравнение (4,1) удовлетворяется.

$\Delta_{1y}=0, \Delta_{2x}=0$ и обратно. Обращение в нуль одного или обоих выражений

$$\Delta_{1y} + \Delta_{2x} - 3(\ln \tau_1)_{xy}, \quad \Delta_{1y} + \Delta_{2x} - 3(\ln \tau_2)_{xy}$$

означает соответственно спрямление шкал z_1, z_2 или обеих одновременно.

Каноническое представление

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & 1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & 1 \\ \xi_3 & \mu & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & 1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & 1 \\ \eta_3 & \nu & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} \mu = \xi_3 u + v, \\ \nu = \eta_3 u + v \end{matrix} \quad (4,2)$$

определяется с помощью (2,1), (2,2), так как $\xi_3 = \bar{x}_{(1)}$, $\mu = \bar{y}_{(1)}$, $\eta_3 = \bar{x}_{(2)}$, $\nu = \bar{y}_{(2)}$. Мы опускаем эти выкладки.

§ 5. Перейдем к номографируемым (§ 1) аналитическим зависимостям ⁽¹⁾

$$F(w, z) = 0, \quad w = p + iq, \quad z = a + bi, \quad \tau_1 = \tau = -\frac{\operatorname{Re}(dw/dz)}{\operatorname{Im}(dw/dz)}, \quad \tau_2 = -1/\tau.$$

Условимся в случае аналитической зависимости заменять Δ_1 через $\bar{j}$ и Δ_2 через $\bar{i}$ ⁽⁷⁾. Условия (4,1) переписутся в виде:

$$\bar{i}_b - \bar{j}_a + \bar{i}^2 + \bar{j}^2 = 0, \quad \bar{j}_b + \bar{i}_a = 0, \quad \bar{j}_{ab} = -\bar{j}\bar{j}_b, \quad \bar{i}_{ab} = \bar{i}\bar{i}_a, \quad (5,1)$$

причем $\bar{j}_b$ и $\bar{i}_a$ одновременно обращаются или не обращаются в нуль, как и $\bar{j}_b + \bar{i}_a - 3(\ln \tau)_{ab}$, $\bar{j}_b + \bar{i}_a + 3(\ln \tau)_{ab}$, и в этом случае, т. е. при $\bar{j}_b = \bar{i}_a = 0$, получаем критерий работы ⁽¹⁾ (см. (2,5)).

Отсюда непосредственно следует в общем виде теорема 5° из ⁽¹⁾, § 14 о четном жанре номографируемой аналитической зависимости.

Найдя $\bar{i}$ и $\bar{j}$ из (5,1), получим все номографируемые аналитические зависимости.

Таким образом*, номографируемая аналитическая зависимость $F(w, z) = 0$, всегда изображается единственной с точностью до коллинеации номограммой, состоящей, вообще говоря, из двух конических сечений (на одном из них шкалы a и b (или z), на другом — шкалы переменных p и q (или w)), которые в случае зависимостей первого класса вырождаются — если одно, то имеем второй жанр, если оба, то имеем нулевой жанр. Это показывает, что нормальные формы ^(2, 3, 7) номографируемых в смысле § 1 аналитических зависимостей первого и второго класса исчерпываются найденными в ^(2, 3) постольку, поскольку все аналитические зависимости второго класса (четвертого жанра) могут быть получены в результате исключения z — прямолинейной ⁽⁷⁾ переменной — из двух номографически совместных аналитических зависимостей первого класса и второго жанра.

Этот вопрос вполне разрешен автором в другой работе на основе вытекающего из § 2 критерия номографической совместности переменных x и y двух систем уравнений: $\Delta_1^{(1)} = \Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(1)} = \Delta_2^{(2)}$. Очевидно, это условие для двух аналитических зависимостей имеет вид: $\bar{j}^{(1)} = \bar{j}^{(2)}$, $\bar{i}^{(1)} = \bar{i}^{(2)}$.

Поступило
6 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. А. Вильнер, Прикладная матем. и механ., 4, в. 2 (1941). ² Он же, ДАН, 53, № 3 (1946). ³ Он же, ДАН, 55, № 9 (1947). ⁴ M. d'Ocagne, Traité de nomographie, 1921. ⁵ T. H. Gropwall, J. des mathémat. pures et appliquées, sér. 6, 8, 59 (1912). ⁶ И. А. Вильнер, Материалы юбилейной 8-й научно-технической конференции кафедр МЭМИИТ'а, Тезисы докладов, стр. 55—56, 1945. ⁷ И. А. Вильнер, Диссертация, МГУ, 1946, гл. гл. I, II, III. ⁸ И. Рибнер, Номограммы, 1932.

* Достаточно сравнить (5,1) с уравнением (131) из ⁽⁵⁾.