

Д. И. ФУКС-РАБИНОВИЧ

ПРИМЕР ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРОИЗВОДЯЩИХ И КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СООТНОШЕНИЙ, НЕПРЕДСТАВИМОЙ ИЗОМОРФНО ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЦ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 10 III 1940)

Пусть G — группа, заданная производящими a, b, x, y и определяющими соотношениями

$$y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad ax = xa, \quad bx = x^2b. \quad (1)$$

Пусть $\mathfrak{R}$ — коммутативное поле, которое мы, не умаляя общности, можем считать алгебраически замкнутым. Мы докажем, что не существует матриц с элементами из $\mathfrak{R}$, порождающих группу, изоморфную G . Для этого мы должны сначала убедиться, что в группе G $y \neq 1$. Мы построим конкретную группу H , в которой выполняются соотношения (1). Рассмотрим следующие отображения плоскости комплексного переменного z на себя:

$$y(z) = -z, \quad x(z) = 2z, \quad a(z) = ze^{\frac{\lg |z|}{\lg 2}}, \quad b(z) = |z|^2 e^{i \arg z}. \quad (2)$$

Под произведением двух подобных отображений $f(z)$ и $\varphi(z)$ мы будем, как обычно, понимать $f[\varphi(z)]$. Единицей служит $1(z) = z$. Отображения (2) однозначно обратимы, именно:

$$y^{-1}(z) = -z, \quad x^{-1}(z) = \frac{z}{2}, \quad a^{-1}(z) = ze^{-\frac{\lg |z|}{\lg 2} \pi i}, \quad b^{-1}(z) = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \arg z},$$

и порождают некоторую группу H , в которой, как легко проверить, выполняются соотношения (1). Так как, однако, $y(z) \neq 1(z)$, то $y \neq 1$ и в абстрактной группе G . Допустим теперь, что существуют матрицы A, B, X, Y порядка n , порождающие группу G' , изоморфную G . Так как $Y^2 = 1$, то, как известно*, Y можно при помощи преобразования некоторой матрицей T привести к диагональному виду. Если представить себе группу G уже преобразованной при помощи матрицы T , то Y принимает вид $Y = \begin{pmatrix} -E_l & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$, где E_l и E_m — единичные матрицы порядков l и m , $l + m = n$. Мы должны считать, что $l > 0$, так как иначе $Y = 1$. Так как $XY = YX$, то X имеет вид $X = \begin{pmatrix} X_l & 0 \\ 0 & X_m \end{pmatrix}$, где X_l и X_m — матрицы порядков l и m . Мы можем, не изменяя Y , привести X_l и X_m к жордановой нормальной форме при помощи преобразования

* См., например, Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, S. 147, Satz 125 (1927).

некоторой матрицей $S = \begin{pmatrix} S_l & 0 \\ 0 & S_m \end{pmatrix}$. Если мы представим себе группу G' уже преобразованной при помощи матрицы S , то X принимает вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}, \text{ где под главной диагональю стоят только нули. } x_1, x_2, \dots$$

$\dots, x_n$ — корни характеристического уравнения матрицы X . Легко

видеть, что $x^{2^\alpha} = \begin{pmatrix} x_1^{2^\alpha} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n^{2^\alpha} \end{pmatrix}$; $x_1^{2^\alpha}, x_2^{2^\alpha}, \dots, x_n^{2^\alpha}$ — корни характеристического

уравнения матрицы X^{2^α} . Так как из соотношения $bxb^{-1} = x^2$ следует, что $b^\alpha x b^{-\alpha} = x^{2^\alpha}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$), то матрица X сопряжена с X^{2^α} и их характеристические уравнения совпадают. Отсюда следует, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ должны встречаться среди чисел $x_1^{2^\alpha}, x_2^{2^\alpha}, \dots, x_n^{2^\alpha}$, и мы имеем

$$x_1 = x_{i_1}^2 = x_{i_2}^2 = \dots$$

Так как n — конечно, то среди чисел $i_1, i_2, \dots$ есть равные $x_1 = x_{i_1}^{2^\alpha} = x_{i_2}^{2^\beta}$ ($\alpha < \beta$). Тогда $x_1^{2^{\beta-\alpha}} = (x_{i_1}^{2^\alpha})^{2^{\beta-\alpha}} = x_{i_1}^{2^\beta} = x_1$ или $x_1^{2^{\beta-\alpha}-1} = 1$. Следовательно, $x_1^{m_1} = 1$, $(m_1, 2) = 1$. Аналогично, $x_i^{m_i} = 1$, $(m_i, 2) = 1$.

Кроме того X сопряжено с YX :

$$YX = \begin{pmatrix} -x_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & -x_2 & \dots & \dots & \\ & & -x_l & \dots & \\ & & & -x_{l+1} & \\ & & & & x_n \end{pmatrix}.$$

Так как $l \geq 1$, то x_1 здесь действительно имеет знак $-$. Числа $-x_1, -x_2, \dots, -x_l, x_{l+1}, \dots, x_n$ должны встречаться среди чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Имеем $-x_1 = x_i$, откуда $(-x_1)^{m_1 m_i} = x_i^{m_1 m_i}$ или $-1 = 1$, что нелепо. Это противоречие показывает, что мы должны принять $l = 0$, $Y = 1$, и представление G' не изоморфно G .

Поступило
10 III 1940