

Д. МИЛЬМАН

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ НА НИХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1947)

Введем следующие обозначения: Q — абстрактная совокупность элементов; E — линейная совокупность вещественных и ограниченных функций на Q , которая содержит функцию, тождественно равную единице; Ω — полугруппа с единицей однозначных отображений Q в себя (если $s_1, s_2 \in \Omega$ то $s_1 \cdot s_2 \in \Omega$; Ω содержит тождественное преобразование Q).

На совокупности Q, E и Ω мы накладываем следующие ограничения: а) если $q_1, q_2 \in Q$, то найдется $x \in E$ так, что $x(q_1) \neq x(q_2)$ (Q различимо совокупностью функций E); б) если $s_1, s_2 \in \Omega$, то найдется $s_3 \in \Omega$ так, что $s_1 Q$ и $s_2 Q$ содержат $s_3 Q$ (sQ обозначает образ Q посредством элемента $s \in Q$); в) если $x \in E$, то $U_s x = x(sq) \in E$ для всех $s \in \Omega$.

Систему $\{Q, E, \Omega\}$ мы будем называть функционально-определенной динамической системой. Элементы $q \in Q$ будем называть „состояниями“, элементы $x \in E$ — „функциями состояний“, элементы $s \in \Omega$ — „переходами в состояниях“.

Введем в E функционал нормы ⁽¹⁾, определяемую равенством

$$\|x\| = \sup_{q \in Q} |x(q)|, \quad x \in E.$$

Введением нормы E превращено в нормированное пространство E_Q (вообще говоря, неполное).

Введением окрестностей точек в Q вида

$$|x_j(q) - x_j(q_0)| < \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad x_j \in E,$$

мы определяем функциональную топологию ⁽²⁾ в Q ; Q превращено в хаусдорфово топологическое пространство $\tilde{Q}$.

Функции состояния непрерывны в $\tilde{Q}$ и переходы в состояниях оказываются непрерывными отображениями $\tilde{Q}$ в себя.

Инвариантной мерой функционально-определенной динамической системы $\{Q, E, \Omega\}$ мы называем неотрицательную функцию $\sigma(I)$ множеств $I \subseteq Q$, аддитивную на наименьшем теле множеств L , содержащем все замкнутые подмножества Q , и удовлетворяющую условию

$$\sigma(I_0) = \inf_{\mathcal{G} \subseteq I} \sum_{G \in \mathcal{G}} \sigma(G),$$

где $\mathcal{G}$ — открытое множество, I_0 — любое подмножество $\bar{Q}$, а также условию инвариантности

$$\sigma(s^{-1}I) = \sigma(I), \quad I \in L, \quad s \in \Omega^*.$$

Инвариантная мера „нормирована“, если $\sigma(Q) = 1$.

Имеет место следующая (основная) теорема:

Теорема 1. Если $\{Q, E, \Omega\}$ есть функционально-определенная динамическая система, E_0 сепарабельно и множество $\{U_s x\}_{s \in \Omega}$ компактно в E_Q при каждом $x \in E$, то динамическая система $\{Q, E, \Omega\}$ обладает хотя бы одной нормированной инвариантной мерой.

Две инвариантные меры $\sigma_1(I)$, $\sigma_2(I)$ мы будем называть E -различимыми, если найдется $x \in E$ так, что

$$\int_{\bar{Q}} x(q) d\sigma_1(I_q) \neq \int_{\bar{Q}} x(q) d\sigma_2(I_q)$$

(интеграл понимается как среднее значение А. Маркова ⁽³⁾).

Инвариантную нормированную меру $\sigma_0(I)$ мы называем E -достижимой, если найдется $x_0 \in E$ так, что:

$$\int_{\bar{Q}} x_0(q) d\sigma(I_q) < \int_{\bar{Q}} x_0(q) d\sigma_0(I_q)$$

для всех нормированных инвариантных мер $\sigma(I)$, которые E -различимы с мерой $\sigma_0(I)$.

Совокупность K нормированных инвариантных мер выпукла.

Точка K называется экстремальной, если она не является серединой какого-либо отрезка, лежащего в K . Экстремальную точку K мы будем называть транзитивной инвариантной мерой.

Меру $\sigma_0(I)$ мы будем называть слабым пределом последовательности мер $\{\sigma_n(I)\}$, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{Q}} x(q) d\sigma_n(I_q) = \int_{\bar{Q}} x(q) d\sigma_0(I)$$

для всех функций $x(q)$, непрерывных на $\bar{Q}$.

Теорема 2. Всякая нормированная инвариантная мера теоремы 1 является слабым пределом последовательности мер, принадлежащих выпуклой оболочке совокупности E -достижимых транзитивных инвариантных мер.

Таким образом, существует „достаточно много“ инвариантных мер транзитивных и одновременно E -достижимых.

Заметим, что в определении функционально-определенной динамической системы $\{Q, E, \Omega\}$ ограничение б) может быть заменено таким:

г) для каждых двух элементов $s_1, s_2 \in \Omega$ найдется элемент $s_3 \in \Omega$ так, что множество $s_3 \cdot \Omega$ содержится в пересечении $s_1 \cdot \Omega$ и $s_2 \cdot \Omega$.

Одесский электротехнический
институт связи

Поступило
22 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, 1932. ² Д. Мильман, ДАН, 59, № 6 (1948). ³ Д. Мильман, ДАН, 57, № 2 (1947). ⁴ Н. Боголюбов и Н. Крылов, *Зб. праць кафедри мат. фізики Інст. матем. АН УССР* (1937).

* $s^{-1}I$ обозначает полный прообраз множества I посредством отображения $s \in \Omega$.