

МАТЕМАТИКА

А. В. БИЦАДЗЕ

О ТАК НАЗЫВАЕМЫХ ПЛОЩАДНО-МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком Н. И. Мухелишвили 17 I 1948)

1°. Пусть D — односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$.

Рассмотрим комплексную функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, действительная и мнимая части которой имеют непрерывные частные производные до второго порядка (включительно), удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

во всей области D .

Такие функции изучены в работах ^(1,2), в которых они названы площадно-моногогенными функциями (areolar monogenic functions). Упомянутые авторы доказывают ряд свойств этих функций, привлекая для этой цели довольно сложный аппарат. Это объясняется тем, что они упустили из виду основную структурную характеристику указанного класса функций, заключающуюся в том, что любая функция этого класса, как мы увидим ниже, имеет вид $f(z) = \varphi(z) + z\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — голоморфные функции.

Ниже мы докажем, что на основании этой формулы все теоремы, доказанные Haskell'ем и Reade'м, получаются весьма просто.

2°. По определению, действительная и мнимая части площадно-моногогенной функции $f(z)$ удовлетворяют условиям (1). Но эти условия равносильны одному комплексному условию

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) / 2$. Отсюда очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \psi(z) \quad (2)$$

является аналитической функцией в области D . Но из (2), очевидно, следует

$$f(z) = \varphi(z) + z\psi(z), \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z .

Таким образом, класс площадно-моногоенных в области D функций представляется в виде (3), где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции в этой области. Из этого представления очевидно, что класс аналитических в области D функций переменной z является подклассом площадно-моногоенных (в области D) функций ⁽¹⁾.

3°. Теперь легко установить ряд свойств площадно-моногоенных функций. Мы ограничиваемся рассмотрением лишь тех предложений, которые доказаны в работах ^(1,2).

Теорема 1. Для того чтобы непрерывная в области D функция $f(z)$ была площадно-моногоенной, необходимо и достаточно

$$\frac{1}{2\pi r^2 i} \int_{C(z,r)} f(\zeta) d\zeta = \psi(z), \quad (4)$$

где $C(z,r)$ — окружность круга $K(z,r)$ произвольного радиуса r с центром в точке z , целиком лежащая в области D , а $\psi(z)$ — аналитическая функция в этой области.

Необходимость. Так как $f(z)$ имеет вид (3), то, применяя формулу Грина и теорему о среднем значении для аналитической функции, имеем

$$\int_{C(z,r)} f(\zeta) d\zeta = 2i \iint_{K(z,r)} \psi(\zeta_1) d\zeta_1 d\eta = 2\pi r^2 i \psi(z), \quad (5)$$

где $\zeta_1 = \xi + i\eta$.

Достаточность. В силу формул (4) и (5) имеем:

$$\int_{C(z,r)} [f(\zeta) - \zeta \psi(\zeta)] d\zeta = 0$$

вдоль любой окружности $C(z,r)$, лежащей в области D , т. е. $f(z) - z\psi(z) = \varphi(z)$ аналитична в области D . Этим теорема доказана полностью. Из доказательства очевидно, что левая часть равенства (4) не зависит от r ⁽²⁾.

Пусть $p_n(z, r, \Phi)$ — произвольный правильный n -угольник, лежащий целиком в области D , с центром в точке z и радиусом вписанного круга r ; Φ — угол, $-\pi/r \leq \Phi < \pi/n$, между направлениями горизонтального радиуса $\bar{R}$ и нормалью $\bar{N}$ многоугольника в точке пересечения $\bar{R}$ с многоугольником. Обозначим через P_n область, ограниченную многоугольником $p_n(z, r, \Phi)$, а через $|P_n|$ — площадь этой области.

Теорема 2. Для того чтобы непрерывная в области D функция $f(z)$ была площадно-моногоенной в этой области, необходимо и достаточно

$$\frac{1}{2|P_n|i} \int_{P_n} f(\zeta) d\zeta = F_{r,\Phi}(z), \quad (6)$$

где $F_{r,\Phi}(z)$ — аналитическая функция (при достаточно малом r) на открытом множестве $D_{r,\Phi} \subset D$ ее определения.

Необходимость. Допустим, что $f(z)$ площадно-моногоенна в области D . Тогда, на основании формулы (3), имеем

$$\frac{1}{2|P_n|i} \int_{P_n} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n} \psi(\zeta_1) d\zeta_1 d\eta = F_{r,\Phi}(z), \quad (7)$$

где $F_{r, \Phi}(z)$, очевидно, аналитична на множестве $D_{r, \Phi} \subset D$ (при фиксированных значениях $0 < r$ и Φ).

Достаточность. Сперва допустим, что $f(z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по x и y . В таком случае, применяя формулу Грина, получим

$$F_{r, \Phi}(z) = \frac{1}{2|P_n|} \iint_{P_n} \left[-\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] d\xi d\eta.$$

Из этой формулы следует аналитичность по z функции $\frac{\partial f}{\partial z}$, что и доказывает теорему.

Теперь покажем, что указанное выше ограничение является излишним. В самом деле, рассмотрим функцию

$$A(f, z, r, \Phi) = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n(z, r, \Phi)} f(\zeta_1) d\bar{\zeta} d\eta, \quad (8)$$

которая имеет непрерывные частные производные первого порядка по x и y .

Согласно формуле (7), очевидно, что функция

$$\frac{1}{2|P_n|} \int_{P_n(z, r, \Phi)} A(f, \zeta, r, \Phi) d\bar{\zeta}$$

аналитична относительно z на открытом множестве $D_{r, \Phi} \subset D$ при достаточно малом r . Поэтому $A(f, z, r, \Phi)$ площадно-моногонна на множестве $D_{r, \Phi} \subset D$, т. е. она аналитична по x и y . Но, в силу формулы (8), при $r \rightarrow 0$ имеем $A(f, z, r, \Phi) \rightarrow f(z)$ равномерно на любом замкнутом множестве, лежащем целиком в области D . Таким образом, $f(z)$ аналитична по x и y во всей области D .

Теорема 3. Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в области D . Для того чтобы функция $F_{r, \Phi}(z)$ была аналитической функцией от z , не зависящей от r и Φ , необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была площадно-моногонной функцией вида

$$f(z) = \varphi(z) + \bar{z} Q_{n-1}(z), \quad (9)$$

где $Q_{n-1}(z)$ — полином степени не выше $n-1$.

Необходимость. Согласно теореме 2 функция $f(z)$ имеет вид (3). Далее, имеем

$$F_{r, \Phi}(z) = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n} \psi(\zeta_1) d\bar{\zeta} d\eta. \quad (10)$$

Переходя к пределу когда $r \rightarrow 0$, из (10) получим $F_{r, \Phi}(z) = \psi(z)$, т. е.

$$\psi(z) = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n} \psi(\zeta_1) d\bar{\zeta} d\eta,$$

что может иметь место тогда и только тогда, когда $\psi(z)$ — полином степени не выше $n-1$ ⁽³⁾.

Достаточность. Так как $f(z)$ имеет вид (9), то

$$\frac{1}{2|P_n|i} \int_{P_n} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n} Q_{n-1}(\zeta_1) d\zeta_1 d\eta_1;$$

но в таком случае имеет место формула о среднем значении ⁽³⁾

$$Q_{n-1}(z) = \frac{1}{|P_n|} \iint_{P_n} Q_{n-1}(\zeta_1) d\zeta_1 d\eta_1,$$

что и доказывает теорему.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академия Наук Груз. ССР

Поступило
17 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. N. Haskell, Bull. Amer. Math. Soc., **52**, No. 4 (1946). ² M. O. Reade, Bull. Amer. Math. Soc., **53**, No. 2 (1947). ³ E. F. Beckenbach and M. O. Reade, Trans. Amer. Math. Soc., **53**, No. 2 (1943).