

МАТЕМАТИКА

И. Я. АКУШСКИЙ

**ОПЕРАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ ТАБУЛЯТОРОВ
ВЕРТИКАЛЬНО-ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДЕЙСТВИЯ**

(Представлено академиком Н. Г. Бруевичем 23 XII 1947)

Мы будем рассматривать некоторые операции на табуляторе вертикально-горизонтального действия, опираясь, в основном, в изложении на обозначения и терминологию, введенные в работах (1).

Табулятор вертикально-горизонтального действия определяется нами как табулятор, способный осуществлять передачу данных между различными частями своей счетной системы. Пусть счетчики табулятора суть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$. Тогда передачу из σ_h в σ_l (h и l — какие-либо из чисел $1, 2, \dots, k$) мы будем обозначать посредством $\sigma_h \rightarrow \sigma_l$ (в случае прямой передачи в σ_l установленного на σ_h числа) и $\sigma_h \leftarrow \sigma_l$ (при передаче дополнительным числом из σ_h в σ_l). В соответствии с характером горизонтальных передач $\sigma_h \rightarrow \sigma_l$ табулятор располагает помимо главных ходов (в течение которых счетчики воспринимают данные от движущихся через воспринимающий блок перфокарт) также и промежуточными — когда действует лишь счетная система табулятора и от головок одной части счетной системы происходит по заданным коммутацией направлениям передача данных в электромагниты другой ее части.

Хотя мы и предполагаем, что рассматриваемый нами табулятор способен осуществлять комбинированные передачи из счетчиков в счетчики в любых мыслимых сочетаниях, однако все же практическая возможность реализации подобных передач сильно ограничена. Элементы управления, связываемые между собой коммутацией, не позволяют задавать табулятору выполнение длинной цепи разнообразных операций. Можно говорить лишь о циклах операций, понимая под этим следующее.

Пусть в данном расчете заняты p счетчиков $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ и пусть $A_1(x, y, \dots, u)$, $A_2(x, y, \dots, u)$, ..., $A_p(x, y, \dots, u)$ — те элементы данного расчета, которые подсчитываются в соответствующих счетчиках. Предположим также, что расчет ведется для систем значений $x_1, x_2, \dots, x_{n_x}; y_1, y_2, \dots, y_{n_y}; \dots; u_1, u_2, \dots, u_{n_u}$ и на счетчиках в некоторый момент установлены значения $A_1(x_{m-1}, y_{m-1}, \dots, u_{m-1})$, $A_2(x_{m-1}, y_{m-1}, \dots, u_{m-1})$, ..., $A_p(x_{m-1}, y_{m-1}, \dots, u_{m-1})$. Совокупность, операций, приводящая к тому, что на счетчиках установятся значения $A_1(x_m, y_m, \dots, u_m)$, $A_2(x_m, y_m, \dots, u_m)$, ..., $A_p(x_m, y_m, \dots, u_m)$, и составляет m -й цикл данного расчета, который мы обозначим через z_m . Число p счетчиков, участвующих в z_m , определяется как связность цикла. Каждую операцию, которая приводит к изменению показаний хотя бы в одном из счетчиков, мы назовем шагом цикла $r_{q,m}$ (q -й шаг цикла z_m), а число шагов в цикле — его длиной l_m . Циклы, состо-

ящие из одних и тех же шагов, мы будем считать равными и, если для данного расчега все циклы z_m ($m = 1, 2, \dots$) равны между собой, мы будем говорить, что этот расчет осуществляется посредством постоянного цикла. Этот последний вид расчетов является наиболее доступным для табуляторов. Проще всего реализуются постоянные циклы небольшой длины. Посредством $a_{i,q}^m$ мы будем обозначать число, установленное на σ_i после шага $r_{q,m}$.

Примером односвязного цикла единичной длины может служить следующий: $r_{1,m} - \sigma_i \rightarrow \sigma_i$. Пусть в начальный момент на счетчике σ_i установлено $a_i^0 = N$. Проводим циклы $z_1, z_2, \dots$. Это дает последовательно $a_{i,1}^1 = N + N = 2N$, $a_{i,1}^2 = 2N + 2N = 2^2N, \dots$. Вообще имеет место соотношение $a_{i,1}^m = a_{i,1}^{m-1} + a_{i,1}^{m-1} = 2a_{i,1}^{m-1}$, которое показывает, что $a_{i,1}^m = 2^m N$. Итак, цикл $r_{1,m} - \sigma_i \rightarrow \sigma_i$ дает возможность вычислять выражения $2^x N$, где x принимает значения последовательных целых чисел.

Рассмотрим следующий n -связный цикл длины $l_m = n - 1$. Шаги этого цикла следующие: $r_{1,m} - \sigma_n \rightarrow \sigma_{n-1}$, $r_{2,m} - \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_{n-2}, \dots, r_{n-1,m} - \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$. Пусть начальные значения счетчиков равны $N_1, N_2, \dots, N_n$. Тогда после m циклов мы получаем на счетчиках следующие показания:

$$\begin{aligned} a_n^m &= N_n, & a_{n-1}^m &= N_{n-1} + \sum_1^m N_n = N_{n-1} + mN_n, \\ a_{n-2}^m &= N_{n-2} + mN_{n-1} + \frac{1}{2}m(m+1)N_n, \dots \\ \dots, a_1^m &= a_1^{m-1} + a_2^m = a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + a_3^m = \dots \\ &\dots = a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \dots + a_m^{m-1}. \end{aligned}$$

Введя обозначение для полинома k -й степени от s $P_k(s)$, удовлетворяющего условию $P_k(s) = \sum_{t=1}^s P_{k-1}(t)$, $P_1(s) = s$, мы можем написать общее выражение для показаний счетчика σ_{n-t} в результате проведения m циклов:

$$a_{n-t}^m = N_{n-t} + P_1(m)N_{n-t+1} + P_2(m)N_{n-t+2} + \dots + P_{n-t}(m)N_n.$$

В частности, при $t = n - 1$ мы получаем для счетчика σ_1 :

$$a_1^m = N_1 + P_1(m)N_2 + P_2(m)N_3 + \dots + P_{n-1}(m)N_n.$$

Если положить $N_1 = N_2 = \dots = N_{n-1} = 0$, $N_n = 1$, мы получим: $a_{n-t}^m = P_{n-t}(m)$. Иначе говоря, при этом условии, задав лишь $N_n = 1$, мы посредством данного цикла можем составить таблицу фигурных чисел до $(n-1)$ -го порядка включительно. Легко видеть, что указанный цикл приводит также к получению в σ_1 полинома $(n-1)$ -й степени $Q_{n-1}(x)$ для значений $x = 1, 2, \dots$. Для этого следует лишь задать такие начальные данные: $N_n = \Delta^{n-1}Q_{n-1}(0)$, $N_{n-1} = \Delta^{n-2}Q_{n-1}(0)$, $\dots$, $N_1 = Q_{n-1}(0)$.

Каждый счетчик-источник может передавать свои показания одновременно (в один и тот же ход) на несколько приемников, однако счетчик-приемник может в один ход принять данные, поступающие лишь по одному направлению. Кроме того, счетчик, являющийся в данный ход источником, не может быть одновременно и приемником,

за исключением случая, когда он передает свои показания на собственные магниты.

Видоизменим схему рассмотренного цикла таким образом: $r_{1m} - \sigma_n \rightarrow \sigma_{n-1}$, $\sigma_n \rightarrow \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_n \rightarrow \sigma_1$; $r_{2,m} - \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_{n-2}$, $\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_{n-3}, \dots, \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_1$; $\dots$; $r_{t,m} - \sigma_{n-t+1} \rightarrow \sigma_{n-t}$, $\sigma_{n-t+1} \rightarrow \sigma_{n-t-1}, \dots, \sigma_{n-t+1} \rightarrow \sigma_1$; $\dots$; $r_{n-1,m} - \sigma_2 \rightarrow \sigma_1$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} a_{n-1}^m &= N_{n-1} + P_1(m) N_n, \quad a_{n-2}^m = N_{n-2} + P_1(m) N_{n-1} + \\ &\quad + [P_2(m) + P_1(m)] N_n, \dots \\ \dots, a_{n-t}^m &= N_{n-t} + P_1(m) N_{n-t+1} + [P_1(m) + P_2(m)] N_{n-t+2} + \dots \\ &\quad \dots + [P_1(m) + P_2(m) + \dots + P_{n-t}(m)] N_n, \dots \\ \dots, a_1 &= N_1 + P_1(m) N_2 + [P_1(m) + P_2(m)] N_3 + \dots \\ &\quad \dots + [P_1(m) + P_2(m) + \dots + P_{n-1}(m)] N_n. \end{aligned}$$

В рассмотренных циклах не вводились карты, и они состояли лишь из промежуточных ходов. Вообще говоря, сочетанием главных (карточных) ходов с промежуточными, введением заданных на перфокартах чисел и их последующими распределениями по различным счетчикам можно осуществлять решение различных математических задач. Мы рассмотрим цикл, приводящий к получению таблицы разностей.

Составление таблицы разностей функции $f(x)$ ($\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$, $\dots$, $\Delta^k f(x)$) является весьма важной операцией и встречается не только как самостоятельная задача, но и как вспомогательное средство контроля решения различных задач.

Пусть нам дана таблица функции $f(x)$, пробитая на картах массива M_f , причем аргумент (значения $x_1, x_2, \dots, x_p$) пробит на каждой карте в секторе g_x , а значения функции (соответственно $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\dots$, $f(x_p)$) пробиты в секторе g_f . Пусть далее после цикла z_{m-1} мы получим на счетчиках $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2k-1}, \sigma_{2k}$ следующие данные:

$$\begin{aligned} a_1^{m-1} &= f(x_{m-1}), \quad a_2^{m-1} = a_3^{m-1} = \Delta f(x_{m-1}), \dots \\ \dots, a_{2k-2}^{m-1} &= a_{2k-1}^{m-1} = \Delta^{k-1} f(x_{m-1}), \quad a_{2k}^{m-1} = \Delta^k f(x_{m-1}). \end{aligned}$$

Нужный нам цикл z_m состоит из следующих $k+2$ шагов $r_{1,m} - \sigma_2 \rightarrow \sigma_2$, $\sigma_4 \rightarrow \sigma_4$, $\dots$, $\sigma_{2k} \rightarrow \sigma_{2k}$; $r_{2,m} - \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$, $\sigma_3 \rightarrow \sigma_4$, $\dots$, $\sigma_{2k-1} \rightarrow \sigma_k$, $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1$, $\sigma_3 \rightarrow \sigma_3$, $\dots$, $\sigma_{2k-1} \rightarrow \sigma_{2k-1}$; $\dots$; $r_{3,m}$ (главный ход) — g_x направляется в призначный сектор, $g_f \rightarrow \sigma_1$, $g_f \rightarrow \sigma_2$; $r_{4,m} - \sigma_2 \rightarrow \sigma_3$, $\sigma_2 \rightarrow \sigma_4$; $r_{5,m} - \sigma_4 \rightarrow \sigma_5$, $\sigma_4 \rightarrow \sigma_6$; $\dots$; $r_{k+2,m} - \sigma_{2k-2} \rightarrow \sigma_{2k-1}$, $\sigma_{2k-2} \rightarrow \sigma_{2k}$.

Покажем, что описанный цикл z_m действительно приводит к цели, т. е., в соответствии с нашими определениями, что в результате указанных $k+2$ шагов мы получим на счетчиках следующие данные:

$$\begin{aligned} a_{1,k+2}^m &= f(x_m), \quad a_{2,k+2}^m = a_{3,k+2}^m = \Delta f(x_m), \dots \\ \dots, a_{2k-2,k+2}^m &= a_{2k-1,k+2}^m = \Delta^{k-1} f(x_m), \quad a_{2k,k+2}^m = \Delta^k f(x_m). \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим счетчик σ_{2t} ($t < k$). После цикла z_{m-1} на нем, как мы условились, было установлено число $a_{2t,k+2}^{m-1} = \Delta^{t-1} f(x_{m-1})$. В течение цикла z_m показания счетчика менялись следующим образом: после хода $r_{1,m} - a_{2t,1}^m = 0$; после хода $r_{2,m} - a_{2t,2}^m = -\Delta^{t-2} f(x_{m-1})$; наконец, после хода $r_{t+2,m}$ на счетчике σ_{2t} образуется число:

$$a_{2t,t+2} = a_{2t-2,t+1} - \Delta^{t-2} f(x_{m-1}). \quad (2)$$

Пусть теперь $t=1$. Тогда $a_{2,1}^m=0$, $a_{2,3}^m=-f(x_{m-1})$, $a_{2,3}^m=f(x_m)-f(x_{m-1})=\Delta f(x_m)$.

Подставляя в (2) последовательно $t=2, 3, 4, \dots$, мы получаем $a_{4,4}^m=a_{2,3}^m-\Delta f(x_{m-1})=\Delta f(x_m)-\Delta f(x_{m-1})=\Delta^2 f(x_m)$; $a_{6,5}^m=a_{4,4}^m-\Delta^2 f(x_{m-1})=\Delta^2 f(x_m)-\Delta^2 f(x_{m-1})=\Delta^3 f(x_m)$ и т. д. Легко видеть, что мы получаем вообще

$$a_{2t,t+2}^m=\Delta^{t-2} f(x_m)-\Delta^{t-2} f(x_{m-1})=\Delta^{t-1} f(x_m).$$

В нечетных счетчиках σ_{2t-1} получаются следующие данные:

$$a_{2t-1,2}^m=0, \quad a_{2t-1,t+2}^m=a_{2t-2,t+2}^m=\Delta^{t-2} f(x_m).$$

Остается еще счетчик σ_1 . В нем

$$a_{1,2}^m=0, \quad a_{1,3}^m=f(x_m).$$

Итак, мы установили, что в результате описанного цикла мы получим на счетчиках $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2k}$ значения (1), что и требовалось показать.

Введя после $(k+2)$ -го хода итоговый ход с печатью показаний призначного сектора и счетчиков $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2t}, \dots, \sigma_{2k}$, мы получим таблицу разностей функции до k -го порядка включительно.

Из описанного цикла можно усмотреть, что для начала расчета нам надо вычислить каким-либо иным путем первые k разностей в начале таблицы и, установив их в соответствующих счетчиках, перейти к проведению основного цикла. Между тем, можно начинать составление таблицы разностей, исходя из нулевых положений счетчиков. Действительно, пусть $a_1^0=a_2^0=\dots=a_{2k}^0=0$. После цикла z_1 на счетчиках установятся $a_1^1=f(x_0)$, $a_2^1=a_3^1=\dots=a_{2k}^1=f(x_1)$. После цикла z_2 мы получим $a_1^2=f(x_2)$, $a_2^2=a_3^2=\Delta f(x_2)$, $a_4^2=a_5^2=\Delta f(x_2)-f(x_1)$, $a_6^2=a_7^2=\Delta f(x_2)-2f(x_2)$, $\dots$, $a_{2k,2}^2=\Delta f(x_2)-(k-3)f(x_2)$. После цикла z_3 на счетчиках установятся $a_1^3=f(x_3)$, $a_3^3=a_3^3=\Delta f(x_3)$, $a_4^3=a_5^3=\Delta^2 f(x_3)$, $a_6^3=a_7^3=\Delta^2 f(x_3)-\Delta f(x_2)+f(x_1)$, $a_8^3=a_9^3=\Delta^2 f(x_3)-2\Delta f(x_2)+3f(x_1)$, $\dots$, $a_{2k}^3=\Delta^2 f(x_3)-(k-2)\Delta f(x_2)+\frac{(k-2)(k-3)}{2}f(x_1)$.

Аналогично и далее. Каждый новый цикл вводит новую правильную разность в паре счетчиков. Так, после первого цикла правильными были лишь показания счетчика σ_1 , после второго цикла правильными были уже, кроме того, и числа в счетчиках σ_2 и σ_3 , и т. д. Вообще после цикла z_t правильными являются показания счетчиков $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2(t-1)}, \sigma_{2t-1}$, а остальные содержат числа, возникающие в результате применения данных циклов к неправильно заданным начальным данным. В $k+1$ циклов влияние начальных данных будет исключено, и мы получим нормальное положение в счетчиках.

Рассмотренный цикл приводит к таблице нисходящих разностей. Для получения же таблицы восходящих разностей необходимо, проводя указанный цикл, направлять массив M_r в табулятор в обратном порядке, т. е. сначала карту для $f(x_r)$, затем для $f(x_{r-1})$ и т. д. Каждая строка табулаграммы в этом случае будет содержать все восходящие разности, относящиеся к соответствующему значению аргумента, при том, однако, что аргументы будут расположены в порядке убывания.

Поступило
23 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Я. Акушский, Усп. математ. наук, 2, в. 2 (1947); Изв. АН СССР, ОТН, № 5 (1947), № 11 (1947).