

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. П. НЕРОНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДЪЕМНОМ КАНАТЕ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 19 III 1947)

При больших высотах подъема груза A (рис. 1) необходимо учитывать как массу, так и вес каната. Будем рассматривать последний как упругую нить, пренебрегая его поперечными размерами.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB (рис. 1) от конца B (точка подвеса груза A) является суммой $x + u(x, t)$ двух слагаемых: первое x выражает нормальную (при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MB каната, а второе, $u(x, t)$, ее деформацию (удлинение). Абсцисса X точки M , отсчитываемая от точки C набегания каната на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O :

$$X = \xi - x - u(x, t), \quad (1)$$

где ξ — абсцисса точки B . Функция $u(x, t)$ и является в нашей задаче искомой. Натяжение T , на основании закона Гука, $T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, где k — известная постоянная (4).

Процесс поднятия груза будет сопровождаться продольными упругими колебаниями каната, характеризуемыми функцией $u(x, t)$, которая остается непрерывной; ее частные производные различных порядков, вообще говоря, испытывают в некоторых точках разрыв непрерывности. Мы будем заниматься слабыми разрывами (иначе, разрывами второго и высших порядков), которые имеют место не только в течение всего нормального режима подъема груза, но также при процессе предохранительного торможения, практически имеющем некоторую, хотя бы и весьма малую, длительность.

Рассматриваемая задача математической физики была мною (2) приведена к интегрированию следующего функционально-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка типа волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (2)$$

Здесь $c = \sqrt{k/\rho}$ (скорость распространения прерывности), $b = k/m$, где ρ — масса единицы длины каната и m — масса подвешенного к нему груза

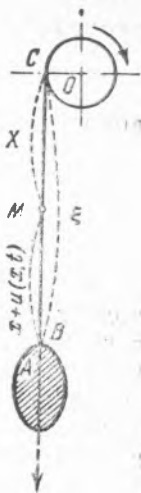


Рис. 1

Начальные условия таковы:

$$u(x, t)|_{t=0} = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq l_0, \quad (3)$$

где l — нормальная длина вертикальной части BC каната и для начального момента времени $l_0 = l|_{t=0}$.

Краевых условий два. Первое из них относится к точке B каната и имеет вид $u(x, t)|_{x=0} = 0$. Второе относится к точке C и выражает отсутствие скольжения каната по поверхности барабана:

$$v'(t) + c^2 \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} + v(t) \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \right|_{x=l} = g, \quad (4)$$

где через g и $v(t)$ обозначены, соответственно, ускорение свободного падения и линейная скорость точек на поверхности барабана. Если обозначить через $s(t)$ длину дуги поворота барабана, то

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \quad s(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad l = l_0 + s(t), \quad (5)$$

учитывая малость относительного удлинения каната.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие указанного мною ранее алгоритма решения поставленной задачи с целью получения более эффективного метода определения натяжения каната. Именно, общий интеграл уравнения (2), выражающийся через две произвольные функции φ и ψ ,

$$u(x, t) = \varphi'(x+ct) + \psi'(x-ct) - \frac{b}{c^2} [\varphi(ct) + \psi(ct)], \quad (6)$$

при помощи первого краевого условия может быть представлен в виде

$$u(x, t) = \frac{b}{c^2} [\Phi(x+ct) + \Phi(-x+ct)] + \Phi'(x+ct) - \Phi'(-x+ct) - \frac{2b}{c^2} \Phi(ct), \quad (7)$$

содержащем только одну неизвестную функцию Φ , которая в интервале $(-l_0, l_0)$ определяется при помощи начальных условий (3). Для ее дальнейшего экстраполирования, следуя Saint-Venant, составляем «*équation promotrice*» и с этой целью вносим значение $u(x, t)$ на основании равенства (7) во второе краевое условие (4). Получаем неоднородное дифференциальное уравнение третьего порядка ($\lambda = b/c^2 = \rho/m$):

$$\Phi'''(z) + \lambda \Phi''(z) = \frac{g - v'(f(z))}{c[c + v(f(z))]} + \frac{c - v(f(z))}{c + v(f(z))} [\Phi'''(\omega) - \lambda \Phi''(\omega)], \quad (8)$$

где $t, t = f(z)$, обозначает наименьший положительный корень уравнения $z = l + ct$, удовлетворяющий условию $f(l_0) = 0$, и $\omega \equiv \omega(z) = -l + ct$.

В дальнейшем мы разберем в качестве примера наиболее важный случай равномерного вращения барабана. Тогда

$$v(t) = \text{const} = -v, \quad s(t) = -vt, \quad l = l_0 - vt, \quad r = \frac{c-v}{c+v},$$

$$z = l_0 + t(c-v), \quad t = f(z) = \frac{z-l_0}{c-v},$$

$$\omega \equiv \omega(z) = \frac{1}{r} [z - l_0(1+r)]. \quad (9)$$

Легко показать, что, рассматривая ряд интервалов ($c > v$, $r < 1$):

$$(-l_0, l_0); (l_0, l_0 + 2l_0r); (l_0 + 2l_0r, l_0 + 2l_0r + 2l_0r^2); \dots \\ \dots \left\{ l_0 \left[\frac{2(1-r^i)}{1-r} - 1 \right], l_0 \left[\frac{2(1-r^{i+1})}{1-r} - 1 \right] \right\}; \dots$$

и имея значения функции $\Phi(z)$ для одного какого-либо интервала, можно при помощи интегрирования уравнения (8) вычислить значения той же функции в следующем интервале. Число операций остается конечным, если $l = l_0 - vt \neq 0$, и неопределенно возрастает, если $l \rightarrow 0$. Случай $l = 0$ на практике исключается.

Из условия слабого разрыва вытекает непрерывность функции $\Phi(z)$ и ее производных $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$. Далее, обозначим выражение функции $\Phi(z)$ в i -м из упомянутых выше интервалов через $\Phi_i(z)$, где $i = 0, 1, 2, \dots$. При $i = 0$ функция $\Phi_0(z)$ делается известной, определяясь через начальные условия (3). Сделаем простейшее предположение, что рассматриваемому периоду равномерного вращения барабана предшествовал период его равноускоренного вращения с постоянным ускорением $-g_1$ всех точек каната, равным тангенциальному ускорению точек на поверхности барабана. Тогда, как легко показать,

$$f_1(x) = \frac{g + g_1}{k} \left(mx + \frac{1}{2} \rho x^2 \right), \quad f_2(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l_0, \\ 2\Phi_0(z) = \frac{m(g + g_1)}{2k} z^2 + 2z\Phi'(0) + 2\Phi(0), \quad -l_0 \leq z \leq l_0. \quad (9 \text{ bis})$$

Далее, в наших новых обозначениях уравнение (8) переписывается так ($i \geq 1$):

$$\Phi_i'''(z) + \lambda \Phi_i''(z) = \frac{1}{r} [\Phi_{i-1}'''(\omega) - \lambda \Phi_{i-1}''(\omega)] + \frac{g}{c(c-v)}. \quad (10)$$

В предыдущем уравнении функция $\Phi_{i-1}(\omega)$ считается известной в $(i-1)$ -м интервале для ω , а функция $\Phi_i(z)$ рассматривается как искомая в i -м интервале для z .

Ограничимся в дальнейшем определением натяжения каната в точке B , для которой $T = k \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 2k\Phi''(ct)$. В i -м интервале имеем

$$T_i = 2k\Phi_i''(ct). \quad (11)$$

Входящая сюда вторая производная Φ_i'' представляет первый интеграл уравнения (10) и определяется равенством

$$\Phi_i''(z) = K_i + \sum_{j=0}^{i-1} K_j^{(j)} \exp \left\{ \frac{\lambda}{r^j} \left[2l_0 \frac{1-r^{j+1}}{1-r} - l_0(1+r^j) - z \right] \right\}. \quad (12)$$

Формула для коэффициента K_i ($i \geq 0$):

$$K_i = \frac{m}{2k} [g + g_1 (-r^{-1})^i]. \quad (13)$$

Далее, коэффициенты с верхним нулевым индексом определяются из соображений непрерывности функции $\Phi''(z)$ при помощи следующего рекуррентного соотношения ($2 \leq j \leq i$):

$$(K_j^{(j)} - K_{j-1}^{(j-1)}) \exp \left[-\lambda \left(2l_0 \frac{1-r^j}{1-r} - l_0 \right) \right] = \\ = (-1)^{j-1} \frac{mg_1(1+r)}{2kr^j} \frac{(1+r)(1+r^2)\dots(1+r^{j-1})}{(1-r)(1-r^2)\dots(1-r^{j-1})}. \quad (14)$$

Наконец, остальные коэффициенты вычисляются с помощью равенства ($1 \leq j \leq i-1$)

$$K_i^{(j)} = \frac{(1+r^{j-1})(1+r^{j-2}) \dots (1+r)^2}{(1-r^j)(1-r^{j-1}) \dots (1-r^2)(1-r)} K_{i-1}^{(0)}. \quad (15)$$

Перед применением формул (12) — (15) выписываем предварительно выражения для функций $\Phi_0''(z)$ и $\Phi_1''(z)$:

$$\Phi_0''(z) = K_0 = \frac{m(g+g_1)}{2k}, \quad \Phi_0''(z) = K_1 + K_1^{(0)} \exp(-\lambda z), \quad (16)$$

где

$$K_1 = \frac{m}{2k} \left(g - \frac{g_1}{r} \right), \quad K_1^{(0)} = \frac{mg_1(1+r)}{2kr} \exp(\lambda l_0).$$

После этого остальные функции $\Phi_i''(z)$ составляются автоматически. Так, например,

$$\Phi_2''(z) = K_2 + K_2^{(0)} \exp(-\lambda z) + K_2^{(1)} \exp\left[\frac{\lambda}{r}(l_0 + l_0 r - z)\right]. \quad (17)$$

Входящие сюда коэффициенты определяются на основании равенств (13) — (15) формулами

$$K_2 = \frac{m}{2k} \left(g + \frac{g_1}{r^2} \right), \quad (K_2^{(0)} - K_1^{(0)}) \exp[-\lambda(l_0 + 2l_0 r)] = -\frac{mg_1(1+r)^2}{2kr^2(1-r)},$$

$$K_2^{(1)} = \frac{1}{1-r} K_1^{(0)}.$$

Возвращаясь к формуле (11) для натяжения T_i каната в точке B подвеса груза, мы можем, таким образом, представить T_i в виде суммы, содержащей тем больше слагаемых, чем более поздний момент времени рассматривается.

Поступило
19 III 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Динник, Прикладн. математ. и мех., 1, № 2 (1933). ² Н. П. Неронов, Прикладн. матем. и мех., 1, № 1, 91 (1937).