Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. С. АРЕШЕВ

О НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 IV 1947)

Настоящая работа посвящена вопросам существования вещественных корней уравнения

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

вблизи особой точки и вопросам максимума и минимума функции $z = f(x, y)$ для тех случаев, в которых дискриминант второго дифференциала равен нулю. На функцию z наложены следующие ограничения: она непрерывна и имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка r.

Назовем обобщенной кривой, или, короче, кривой всякое плоское множество H точек M, координаты которых заданы уравнениями $x = x(u)$, $y = y(u)$, где $x(u)$ и $y(u)$ — какие-нибудь функции переменного u, определенные на множестве действительных чисел $Q = \{u\}$, удовлетворяющем соотношению $u \neq 0$, $\inf |u| = 0$. Введем обозначения:

$$\varphi = a + \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{k!} u^k, \quad y_m(v) = b + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_k}{k!} u^k + \frac{u^m}{m!} v,$$

$$x_m(v) = a + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{k!} u^k + \frac{u^m}{m!} v, \quad \psi = b + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k}{k!} u^k.$$

Будем говорить, что кривая $x = x(u)$, $y = y(u)$ принадлежит к окрестности $P_{1,m} = (\varphi, b, \ldots, b_m)$, если координаты этой кривой могут быть представлены в виде $x = \varphi$, $y = y_m[\psi_m(u)]$, где функция $\psi_m(u)$ произвольна и удовлетворяет единственному условию $\lim \psi_m = b_m$ при $u \to 0$. Аналогично кривая, принадлежащая к окрестности $P_{2,m} = (\psi, a, \ldots, a_m)$, может быть представлена в виде $x = x_m[\varphi_m(u)]$, $y = \psi$, где φ_m произвольна и удовлетворяет условию $\lim \varphi_m = a_m$ при $u \to 0$.

Будем также говорить:

1. Кривая H составлена из кривых H_α, если множества точек H и H_α связаны соотношением $H = \sum_\alpha H_\alpha$.

2. Кривая $H \subset P_{1,m}$ непрерывна, если функция $\psi_m(u)$ определена на некотором отрезке $|u| < \delta$ и непрерывна на нем.

3. Кривая H проходит через точку A, если A содержится в замыкании H.

Назовем окрестности $P_{1,m}$ и $P_{2,m}$ окрестностями m-го индекса, а кривые H_α — компонентами кривой H. Рассмотрим уравнение (1). Обозначим термином корень всякую обобщенную кривую, удовлетворяющую этому уравнению. Тогда характер поведения корней вблизи фиксированной точки $A(a, b)$ может быть выражен при помощи теорем 1—4.

Теорема 1. *Пусть $z=f$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Она непрерывна и имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно в окрестности точки A.*

2. *В точке A функция z и все ее частные производные до n-го порядка равны нулю, в то время как по крайней мере одна из производных n-го порядка отлична от нуля.*

При этих условиях всякий корень уравнения (1), который проходит через точку A, можно составить из кривых, принадлежащих окрестностям $P_{1,1}=(\varphi, b, b_1)$ и $P_{2,1}=(\psi, a, 0)$, где $v=b_1$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{1,1}(v)\equiv\frac{d^n}{du^n}f[\varphi, y_1(v)]_{u=0}=0, \qquad (2)$$

а коэффициенты a_k функции φ произвольны, и, соответственно, $v=0$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{2,1}(v)\equiv\frac{d^n}{du^n}f[x_1(v), \psi]_{v=0}=0, \qquad (3)$$

а коэффициенты b_k функции ψ произвольны.

Теорема 1 дает возможность определить все те окрестности P_1 первого индекса, к которым могут принадлежать компоненты любого корня уравнения (1). Если при этом коэффициент v некоторой такой окрестности P_1 является однократным корнем соответствующего характеристического уравнения (2) или (3), то характер поведения кривых, принадлежащих этой окрестности, может быть выяснен при помощи теоремы 3. Если же коэффициент v — многократный корень, то вопрос остается открытым, и для дальнейшего исследования необходимо сузить окрестность*, разбив ее на части, т. е. необходимо перейти к окрестностям более высокого индекса. Достаточные условия закономерности такого перехода дает теорема 2.

Теорема 2. *Пусть $z=f$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Она непрерывна и имеет непрерывные частные производные до $l+\lambda+1$-го порядка включительно в окрестности точки A.*

2. *i-я производная по u, вычисленная от функции f по правилу дифференцирования сложной функции, не содержит y^{m+1} при $i=\overline{1, l}$, $u=0$, $y^{(k)}=b_k$, $k=\overline{1, m}$.*

3. $\frac{d^i}{du^i}f[\varphi, y_m(v)]_{u=0}=0$, *где $i=\overline{0, l-1}$, а коэффициенты a_k функции φ произвольны.*

4. *$v=b_m$ есть λ-кратный корень полинома*

$$\Phi_{1,m}(v)\equiv\frac{d^l}{du^l}f[\varphi, y_m(v)]_{u=0}.$$

5. $\frac{d^{l+i}}{du^{l+i}}f[\varphi, y_{m+1}(v)]_{v=0}=0, \quad i=\overline{0, \lambda-1}.$

---

* Окрестности, требующие такого дополнительного исследования, назовем критическими.

При этих условиях всякий корень $x = x(u)$, $y = y(u)$ уравнения (1), *который принадлежит к окрестности $P_{1,m}$, можно составить из кривых, принадлежащих к окрестностям $P_{1,m+1} = (\varphi, b, \ldots, b_m, b_{m+1})$, где $v = b_{m+1}$ — действительные корни $m+1$-го характеристического уравнения*

$$\Phi_{1,m+1}(v) = \frac{d^{l+\lambda}}{du^{l+\lambda}} f\,[\varphi,\; y_{m+1}(v)]_{u=0} = 0.$$

Замечание. Второе, третье и четвертое условия теоремы не накладывают ограничений на функцию f, так как выполняются автоматически в тех случаях, когда коэффициенты критических окрестностей определяются в порядке следования их индексов. Пятое условие удовлетворяется при помощи соответствующего выбора функции φ. При этом надо учитывать следующее обстоятельство: если $\varphi(u)$ выбрана так, что $\varphi(u) \geqslant 0$ для любого $-\varepsilon \leqslant u \leqslant \varepsilon$, то $x - a \geqslant 0$. Поэтому необходимо дополнительно исследовать ту часть окрестности, в которой $x - a < 0$. Так как выбор функции φ сводится к выбору постоянных a_k, то это проще всего произвести по ходу самого исследования. Здесь особенно важно то, что при построении полиномов $\Phi_{1,m+1}$ ранее определенные коэффициенты a_k, от которых зависели полиномы $\Phi_{1,i}$, $i = \overline{1, m}$, остаются без изменения.

Продолжая достаточно далеко процесс перехода от критической окрестности к окрестностям более высокого индекса, можно в широком классе случаев разделить корни уравнения (1), т. е. притти к такому характеристическому уравнению, которое не имеет действительных кратных корней, или к такому уравнению, которое вовсе не имеет действительных корней. В этих случаях характер поведения корней уравнения (1) может быть выяснен при помощи теорем 3 и 4.

Теорема 3. *Если $z = f$ удовлетворяет первому, второму и третьему условиям теоремы* 2 *и $v = b_m$ — однократный действительный корень полинома $\Phi_{1,m}$, то в окрестности $P_{1,m}$ уравнение* (1) *имеет один и только один непрерывный корень H; всякий другой корень, принадлежащий этой же окрестности, является компонентой H.*

Теорема 4. *Если $z = f$ удовлетворяет всем условиям теоремы* 2 *и полином $\Phi_{1,m+1}$ не имеет действительных корней, то в окрестности $P_{1,m}$ в достаточно малой полосе $|u| < \delta$ функция f обращается в нуль только в точке A.*

Теоремы, аналогичные теоремам 2, 3 и 4, справедливы также и для окрестностей $P_{2,m}$.

Пусть A — стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Если второй дифференциал d^2z есть положительно определенная или отрицательно определенная форма, то A будет точкой минимума или максимума. Если же хотя бы одно из собственных значений этой формы равно нулю, то вопрос остается открытым и разбор даже частных случаев требует специальных соображений (см., например, ([1])).

Так как в достаточно малой окрестности экстремальной точки значения независимых переменных x и y удовлетворяют одному и только одному из неравенств

$$f(x, y) - f(a, b) < 0, \quad f(x, y) - f(a, b) > 0 \quad \text{при } x \neq a, \quad y \neq b,$$

то вопросы экстремума можно свести к вопросам существования корней уравнения $f(x, y) - f(a, b) = 0$. Более полно эту мысль выражает следующая теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы A была экстремальной точкой непрерывной функции* $z=f(x, y)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* $f(x, y)-f(a, b)=0$ *не имело действительных корней, удовлетворяющих соотношениям:*

$$\lim x=a, \quad \lim y=b \quad \textit{при} \quad u \to 0.$$

Поступило
8 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ludwig Scheeffer, Math. Ann., **35**, 541 (1890).