Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ ТИПА ПЛАНШЕРЕЛЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 I 1947)

Пусть в некотором гильбертовом пространстве H задано линейное, плотное в H подпространство H_0 так, что каждому элементу $f\subset H_0$ отнесен некоторый ограниченный оператор в H, который мы обозначим через A_f.

Мы предположим, что совокупность операторов A_f удовлетворяет следующим требованиям:

1. $A_{\alpha f+\beta g}=\alpha A_f+\beta A_g$; α, β — любые комплексные числа.
2. $A_f A_g=A_g A_f$.
3. Если $f, g\subset H_0$, то $A_f g=A_g f\subset H_0$, где $A_f g$ означает результат применения оператора A_f к g.
4. Существует такой элемент $e\subset H_0$, что $A_e=E$ (E — единичный оператор).
5. Существует в H_0 такое линейное подпространство T_0, что оператор $A_t, t\subset T_0$, эрмитов и каждый элемент $h\subset H_0$ представим в виде $h=t_1+it_2$; $t_1, t_2\subset T_0$, $i=\sqrt{-1}$.

Если для элементов $h\subset H_0$ ввести новую норму, положив $\|h\|_1=\|A_h\|$, то из $A_h e=h$ следует, что $\|h\|\leqslant\|A_h\|\,\|e\|$, откуда получим, что если последовательность $h_n\subset H_0$ есть последовательность Коши в смысле $\|\ \|_1$, то h_n сходится в H_0. Замыкание H_0 по норме $\|\ \|_1$, таким образом, является некоторым линейным подпространством $\tilde{R}\subset H$, и нетрудно видеть, что $\tilde{R}$ тоже удовлетворяет всем аксиомам 1—5.

Пространство $\tilde{R}$ является коммутатитивным нормированным кольцом, если определить в нем операцию умножения, положив $f\circ g=A_f g$.

Это кольцо $\tilde{R}$ изоморфно кольцу R операторов A_f. Действительно, $A_f A_g s=A_f A_s g=A_s A_f g=A_{A_f g} s$, откуда ($s\subset H_0, H_0$ плотно в H)

$$A_f A_g=A_{A_f g}=A_{f\circ g}. \tag{1}$$

Обозначим через T пространство, заменяющее для $\tilde{R}$ пространство T_0 в аксиоме 5. Если $r\subset\tilde{R}$ и $r=t_1+it_2$; $t_1, t_2\subset T$, то в $\tilde{R}$ можно определить операцию r^*, положив $r^*=t_1-it_2$. Так как $\tilde{R}$ изоморфно R и $A_{r^*}=A_r^*$, где A^* есть оператор, сопряженный A, то $\tilde{R}$, очевидно, удовлетворяет требованиям леммы 1 в ([1]), и в силу этой леммы $\tilde{R}$ изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на множестве $\mathfrak{M}$ своих максимальных идеалов.

Теорема 1. *На множестве $\mathfrak{M}$ существует такая положительная, вполне аддитивная на борелевских множествах функция меры ω, что ω-мера открытого множества отлична от нуля, H изометрически отображается на гильбертово пространство $\tilde{H}$*

2*

всех функций $f(M)$ с интегрируемым квадратом модуля относительно $d\omega$ и справедлива формула

$$(A_f g, r) = \int\limits_{\mathfrak{M}} f(M) g(M) \overline{r}(M) d\omega, \quad f, r, g \subset \tilde{R}. \tag{2}$$

В частности, при $f=e$

$$(g, r) = \int\limits_{\mathfrak{M}} g(M) \overline{r}(M) d\omega, \quad g, r \subset \tilde{R}. \tag{3}$$

Доказательство. Положим $Pf = (f, e)$, $f \subset \tilde{R}$.

Так как $|Pf| \leqslant \|f\| \, \|e\| \leqslant \|f\|_1 \|e\|^2$, то, в силу изоморфизма $\tilde{R}$ и $C(\mathfrak{M})$, Pf является линейным функционалом в $C(\mathfrak{M})$.

Если $f(M) \geqslant 0$, то, полагая $g(M) = \sqrt{f(M)}$, получим $f = g \circ g = A_g A_g e$, и

$$Pf = (A_g^2 e, e) = (A_g e, A_g^* e) = (A_g e, A_g e) = (g, g) > 0^*. \tag{4}$$

Из (4) следует, что Pf — позитивный функционал, и, по известной теореме,

$$Pf = (f, e) = \int\limits_{\mathfrak{M}} f(M) d\omega(M). \tag{5}$$

Вставив в (5) вместо f $r^* \circ g \circ f$, получим

$$P(r^* \circ g \circ f) = \int\limits_{\mathfrak{M}} r^* \circ g \circ f\,(M) d\omega(M) = \int\limits_{\mathfrak{M}} f(M) g(M) \overline{r}(M) d\omega(M) =$$

$$= (A_r^* A_f g, e) = (A_f g, r). \tag{6}$$

Если U — открытое множество, то для непрерывной функции $f(M)$, $0 \leqslant f(M) \leqslant 1$, $f(M) = 0$, если $M \subset \mathfrak{M} - U$, получим:

$$0 < P(f) = \int\limits_{\mathfrak{M}} f(M) d\omega \leqslant \omega(U).$$

Изоморфизм H и $\tilde{H}$ легко следует из (3) в силу плотности $C(\mathfrak{M})$ в $\tilde{H}$ и $\tilde{R}$ в H.

Формулу (2) можно рассматривать как обобщение теоремы順 順Планшереля (точнее, равенства Парсеваля). Из (2) легко получится, например, как формула обращения H. Weyl'я ([2]), так и теорема順Планшереля для абелевых локально бикомпактных групп. Мы покажем, как из (2) вытекает теорема Планшереля на абелевых группах.

Пусть $\mathfrak{N}_0$ означает совокупность всех абсолютно интегрируемых относительно $d\tau$ функций на группе G, равных нулю вне некоторой (не фиксированной) окрестности единицы с бикомпактным замыканием; τ — инвариантная мера; H — пространство L^2 относительно $d\tau$. Положив $A_f g = \int\limits_G f(x-t) g(t) d\tau(t)$ $(f \subset \mathfrak{N}_0\, g \subset H)$, получим, что операторы A_f удовлетворяют требованиям 1, 2, 3, 5.

Легко построить действительную функцию $h \subset \mathfrak{N}_0$ со следующими свойствами: a) $h(-x) = h(x)$; b) $\int\limits_G h(x) \chi(x) d\tau(x) \neq 0$ при любом χ из группы характеров X группы G; c) из $(A_h g, g) = 0$ следует $g = 0$; d) $h \neq A_h f$, $f \subset \mathfrak{N}_0$.

* Если $g(M)$ — действительная функция, то A_g — эрмитов оператор.

Из c) следует, что множество $\mathfrak{R}_1$ элементов вида $A_h f$, $f \subset \mathfrak{R}_0$, плотно в H. Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность элементов s вида

$$s = A_h f_s + \lambda h, \quad f_s \subset \mathfrak{R}_0, \tag{7}$$

λ — комплексное число.

Из c) и d) следует, что представление (7) однозначно.

Положим для $s \subset \mathfrak{R}$ $\hat{A}_s = A_{f_s} + \lambda E$ (E — единичный оператор).

Совокупность операторов $\hat{A}_s$ удовлетворяет всем требованиям 1—5, и мы можем применить теорему 1.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество максимальных идеалов соответствующего кольца $\tilde{R}$ и $M \subset \mathfrak{M}$, $M \neq \overline{\mathfrak{R}}_1$ ($\overline{\mathfrak{R}}_1$ — замыкание $\mathfrak{R}_1$).

Теорема 2. *Если* $s \subset \mathfrak{R}_1$, *то*

$$s(M) = \frac{1}{\gamma(\chi)} \int_G s(x) \chi(x) \, d\tau(x), \tag{8}$$

где $\chi(x)$ — *некоторый характер группы* G *и* $\gamma(\chi) = \int_G h(x) \chi(x) d\tau(x)$.

Наоборот, каждый характер определяет с помощью (8) *некоторый максимальный идеал.*

Формулы (3) и (8) дают ($f, g \subset \mathfrak{R}_1$):

$$(f, g) = \int_X \chi(f) \overline{\chi}(g) \frac{1}{|\gamma(\chi)|^2} d\omega_1(\chi), \tag{9}$$

где

$$\chi(f) = \int_G f(x) \chi(x) \, d\tau(x) \quad *.$$

Вводя понятным образом новую меру $\omega(\chi)$, получим

$$(f, g) = \int_X \chi(f) \overline{\chi}(g) \, d\omega(\chi). \tag{9'}$$

Покажем инвариантность $\omega(\chi)$:

$$\int_X \chi(f_1) \overline{\chi(f_2)} \, d\omega(\chi) = \int_X \chi(f'_1) \overline{\chi(f'_2)} \, d\omega(\chi\chi_0) = (f_1, f_2), \tag{10}$$

где $f_i' = f_i(x) \chi_0(x)$, а χ_0 — произвольный элемент из X. Но, по (9'),

$$(f_1, f_2) = (f_1', f_2') = \int_X \chi(f_1') \overline{\chi(f_1')} \, d\omega(\chi). \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), получим, так как функций $\chi(f')$, $f \subset \mathfrak{R}_1$, «достаточно много», что $\omega(V\chi_0) = \omega(V)$ (V — подмножество X).

Из формулы (9), представляющей обобщение равенства Парсеваля, легко известными способами получить теорему Планшереля.

Поступило
17 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Гельфанд и М. Наймарк, Мат. сб., 12 (54): 2 (1943). [2] H. Weyl, Math. Ann., 68.

* (9) доказана только для элементов $f, g \subset \mathfrak{R}_1$ но, по теореме 1, ее можно распространить на все H. $\chi(f)$ тогда естественно определится как функция из $\tilde{H} = L^2$ относительно $d\omega$.