

Л. В. КЕЛДЫШ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НУЛЬМЕРНОГО КОМПАКТА

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 15 VII 1947)

Мы изучаем непрерывные отображения нульмерного компакта на компакт конечной размерности $n > 0$. Рассматриваемые компакты лежат в евклидовом пространстве. П. С. Александров поставил вопрос о возможности представить непрерывное отображение, повышающее размерность $Y = f(X)$, в виде итерации двух непрерывных отображений $f = \varphi\psi$ так, что ψ не повышает размерности, а φ конечнократно (такое представление мы в дальнейшем называем представлением A).

И. А. Вайнштейн доказал ⁽¹⁾, что для неприводимого отображения нульмерного компакта на отрезок представление A всегда существует. Он же указал пример непрерывного отображения одномерного компакта на двумерный, для которого представление A невозможно. Мы находим условия, при которых для непрерывного отображения нульмерного компакта представление A существует, и указываем примеры, когда оно невозможно.

Непрерывное отображение $Y = \varphi(X)$ называется m -кратным, если прообраз каждой точки y содержит не более m точек.

Мы рассматриваем разбиения нульмерного компакта X на суммы конечного числа непересекающихся кусков (т. е. открытых и замкнутых его частей). Последовательность разбиений X такая, что каждое последующее разбиение является подразбиением предшествующего, называется убывающей последовательностью разбиений X .

Теорема 1. Для того чтобы для непрерывного отображения $Y = f(X)$ нульмерного компакта X существовало представление A $f = \varphi\psi$, где φ m -кратно, необходимо и достаточно, чтобы для произвольной убывающей последовательности чисел ε_k , стремящихся к нулю, существовала убывающая последовательность (S_k) разбиений X на непересекающиеся куски так, что k -е разбиение X индуцирует ε_k -разбиение Y порядка не выше $m - 1$.

Если $\dim Y = n^*$, то, в силу теоремы Гуревича ⁽²⁾, φ не менее, чем $n + 1$ -кратно. Разбиение n -мерного компакта F на компакты F_i мы называем правильным, если для любого k $\dim F_{i_1} \dots F_{i_k} \leq n - k + 1$. Легко показать, что если $\dim Y = n$ и существует представление A $f = \varphi\psi$, где φ $n + 1$ -кратно, то разбиения (S_k) теоремы 1 индуцируют правильные ε_k -разбиения Y порядка n .

Для нульмерного компакта X всегда возможно каноническое представление вида

$$X = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_m} \pi_{mi}, \quad (1)$$

* $\dim Y$ — размерность Y .

где все π_{m_i} — куски X , причем либо $\pi_{m_i} \cdot \pi_{m'_i} = 0$, либо $\pi_{m_i} \subset \pi_{m'_i}$ (тогда $m > m'$) и диаметры π_{m_i} стремятся к нулю с возрастанием m . Часто непрерывное отображение X на Y определяется заданием для всех π_{m_i} их образов $f(\pi_{m_i})$. Поэтому удобно иметь связанный с таким заданием f критерий для возможности представления A .

Теорема 2. Пусть X и Y — компакты, $\dim X = 0$, $\dim Y = n$ и $Y = f(X)$ — непрерывное отображение. Если существует такое k , что пересечение k образов элементов некоторого канонического представления X одного ранга всегда нульмерно или пусто, то для f существует представление A , где φ не более, чем $n + k - 1$ -кратно.

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме:

Лемма. Пусть $Y = f(X)$ непрерывное отображение нульмерного компакта X и $X = \Sigma S_i$ — правильное разбиение X на куски, индуцирующее разбиение $Y = \Sigma f(S_i)$. Если разбиением одного элемента $f(S_i)$ на куски диаметра $< \varepsilon$ можно получить разбиение Y такое, что пересечение $m + 1$ элементов разбиения, хоть один из которых входит в $f(S_i)$, пусто, то можно, разбив S_i на куски, получить правильное разбиение X , индуцирующее новое разбиение Y , обладающее тем же свойством.

Лемма доказывается по индукции и доказательство ее сходно с доказательством леммы в (3).

Следствие. Для неприводимого отображения нульмерного компакта на отрезок возможно представление A $f = \varphi\psi$, где φ двукратно*, так как в этом случае $k = 2$,

Мы рассматриваем далее конечнократное непрерывное отображение φ такое, что число точек, содержащихся в прообразах различных точек образа, неограничено.

Пусть $Y = f(X)$ — непрерывное отображение и $X = \sum_i S_{m_i}$ — убывающая последовательность правильных разбиений X . Для каждой точки $y \in Y$ обозначим через $l_m(y)$ число элементов S_{m_i} , пересекающихся с $f^{-1}(y)$. Назовем индексом последовательности разбиений (S_m) в точке y верхнюю грань чисел $l_m(y)$:

$$\text{ind}_{(S_m)}(y) = \sup_{m \rightarrow \infty} l_m(y).$$

Если f конечнократно, то, очевидно, $\text{ind } y$ конечен для любой последовательности правильных разбиений X .

Теорема 3. Если $Y = f(X)$ — непрерывное отображение нульмерного компакта, то для того, чтобы существовало представление A , необходимо и достаточно, чтобы для произвольной убывающей последовательности чисел $\varepsilon_m \rightarrow 0$ существовала убывающая последовательность (S_m) правильных разбиений X , индуцирующих ε_m -разбиения Y такие, что $\text{ind}_{(S_m)} y$ конечен в каждой точке.

Пользуясь этим критерием, мы строим пример неприводимого отображения канторовского совершенного множества на квадрат, для которого представление A невозможно. Для этого строим убывающую последовательность $1/2^m$ -разбиений квадрата C со сторонами длины 1, лежащими на осях OX и OY .

Прямыми l_x и l_y делим C на четыре равных квадрата. Затем часть l_x , лежащую слева (и также справа) от l_y , заменяем бесконечной ломаной, нечетные звенья которой располагаются последовательно на прямых $y = 1/4$ и $y = 3/4$, а концы их соединены звеньями, параллельными оси Y . При этом верхний топологический предел зве-

* Это усиление теоремы И. А. Вайнштейна (1), который не оценил кратности φ .

ньев совпадает с отрезком L прямой l_y с концами $y=1/4$ и $y=3/4$. Разбиение C на четыре куска $\overline{\delta_{1i}}$, каждый из которых ограничен отрезком прямой l_y и одной из построенных ломаных, называем разбиением первого порядка.

Дальнейшие разбиения C строим по индукции так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1. Каждый кусок $\overline{\delta_{mi}}$ ранга m лежит в прямоугольнике p_{mi} со сторонами, параллельными осям, и диагональю $< 1/2^{m-1}$.

2. Граница b_{mi} куска $\overline{\delta_{mi}}$ состоит из отрезков, лежащих на двух счетных множествах прямых, параллельных осям. Множества эти J_{xmi} и J_{ymi} замкнуты.

3. Если точка M входит в $\overline{\delta_{mi}} \dots \overline{\delta_{mik}}$, то M входит в отрезок, содержащийся в $\overline{\delta_{mi}} \dots \overline{\delta_{mik}}$. При этом в $\overline{\delta_{mi}} \cdot \overline{\delta_{mj}}$ входят только граничные точки кусков.

Построенное разбиение первого порядка удовлетворяет этим условиям. Для построения $(m+1)$ -го разбиения делим прямоугольник p_{mi} , содержащий $\overline{\delta_{mi}}$, на четыре прямоугольника $p'_{m+1,j}$ при помощи прямых l_{xmi} и l_{ymi} , параллельных осям и не принадлежащих $J_{xmi} + J_{ymi} = \sum_i (J_{xmi} + J_{ymi})$, так, что диагонали всех $p'_{m+1,j}$ меньше $1/2^m$. Пря-

мую l_{xmi} окружаем замкнутой полосой λ_{xmi} , не содержащей прямых множества J_{xmi} , так, чтобы полосы λ_{xmi} и λ_{xmj} совпадали, если $l_{xmi} = l_{xmj}$, и не пересекались в противном случае (аналогично для l_{ymi}). Каждый прямоугольник $p'_{m+1,j} \subset p_{mi}$ заменяем прямоугольником $p_{m+1,j}$, полученным прибавлением к $p'_{m+1,j}$ отрезков пересекающихся с ним полос λ_{xmi} и λ_{ymi} . Ширину полос выберем достаточно малой, чтобы диагонали $p_{m+1,j}$ были $< 1/2^m$. Прямые l_{xmi} и l_{ymi} пересекают кусок $\overline{\delta_{mi}}$ на $n \leq 4$ кусков $\overline{\delta'_{m+1,j}}$. Если границы $\overline{\delta'_{m+1,j}}$ не пересекаются с l_{xmi} и l_{ymi} (что возможно, если $\overline{\delta_{mi}}$ несвязно), то $\overline{\delta'_{m+1,j}} = \overline{\delta_{m+1,j}}$.

В противном случае перестроим $\overline{\delta'_{m+1,j}}$ внутри полос λ_{xmi} и λ_{ymi} . Прямые l_{xmi} и l_{ymi} пересекаются либо вне, либо строго внутри $\overline{\delta_{mi}}$, так как не несут отрезков границы b_{mi} . Во втором случае пусть $M = l_{xmi} \cdot l_{ymi}$. Тогда $M \subset \lambda_{xmi} \cdot \lambda_{ymi} = \sigma_{mi}$. Очевидно, $\sigma_{mi} \subset \overline{\delta_{mi}}$. Тогда, так же как при построении $\overline{\delta_{1i}}$, заменяем части l_{xmi} , лежащие в σ_{mi} вправо и влево от l_{ymi} , двумя бесконечнозвенными ломаными, у которых звенья, параллельные оси OX , лежат на сторонах полосы λ_{xmi} и \lim top звеньев совпадает с отрезком $l_{ymi} \cdot \sigma_{mi}$. Части $\overline{\delta'_{m+1,j}}$, лежащие в σ_{mi} , заменяем кусками, полученными разбиением σ_{mi} при помощи l_{ymi} и построенных ломаных.

Рассмотрим далее часть l_{xmi} , попавшую в $\lambda_{xmi} - \sigma_{mi}$. Имеем $l_{xmi} \cdot b_{mi} \subset \lambda_{xmi} - \sigma_{mi}$. Множество $l_{xmi} \cdot b_{mi}$ замкнуто и счетно. Каждая его точка лежит на отрезке b_{mi} , параллельном оси OY , пересекающем всю полосу λ_{xmi} . Каждую изолированную точку M множества $l_{xmi} \cdot b_{mi}$ мы включаем в прямоугольник π_M со сторонами, параллельными осям, так, что две стороны π_M лежат на сторонах λ_{xmi} и всякая принадлежащая π_M точка b_{mi} лежит на отрезке L , проходящем через M параллельно оси OY . Тогда часть π_M , лежащая с одной стороны от L , принадлежит $\overline{\delta_{mi}}$, а с другой — не принадлежит. Прямоугольник $\pi_M \cdot \overline{\delta_{mi}}$ прямой l_{xmi} рассечен на два куска, принадлежащих, соответственно, $\overline{\delta'_{m+1,j}}$ и $\overline{\delta'_{m+1,j'}}$. Часть l_{xmi} , лежащую в $\pi_M \cdot \overline{\delta_{mi}}$, так же как мы делали выше, заменяем бесконечнозвенной ломаной, у которой звенья, параллельные оси OX , лежат на сторонах λ_{xmi} , и \lim top звеньев совпадает с L . Прямоугольник $\pi \cdot \overline{\delta_{mi}}$ этой ломаной разбивается на два

куска, одним из них мы заменяем $\pi_m \cdot \bar{\delta}_{mi}$, другим $\pi_m \cdot \bar{\delta}'_{m+1, j'}$. Такое построение производим около любой изолированной точки множества $l_{xmi} \cdot b_{mi}$ (и также $l_{ymi} \cdot b_{mi}$). Тогда каждый кусок $\bar{\delta}'_{m+1, j}$ заменяется новым куском $\bar{\delta}_{m+1, j}$. Каждый $\bar{\delta}_{mi}$ таким образом разбивается на $n \leq 4$ кусков $\bar{\delta}_{m+1, j}$ диаметра $< 1/2^m$. Мы показываем, что полученное разбиение удовлетворяет условиям 1, 2, 3.

Для построения непрерывного отображения $C = f(P)$ рассмотрим каноническое представление канторовского совершенного множества вида (1), причем $N_1 = 4$ и π_{mi} делится на столько же кусков, на сколько кусков $\bar{\delta}_{m+1, j}$ разделен $\bar{\delta}_{mi}$. Куски $\pi_{m+1, j}$, подчиненные π_{mi} , нумеруются теми же индексами, как куски $\bar{\delta}_{m+1, j}$, подчиненные $\bar{\delta}_{mi}$. Положив $f(\pi_{mi}) = \bar{\delta}_{mi}$, получим непрерывное неприводимое отображение $C = f(P)$. Для этого отображения не существует представления A , так как мы показываем, что для любой убывающей последовательности (S_m) правильных разбиений P , индуцирующих ε_m -разбиения C , $\varepsilon_m \rightarrow 0$, найдется точка $M \in C$ такая, что $\text{ind}_{(S_m)} M = \infty$.

Можно построить простой пример приводимого отображения канторовского совершенного множества на отрезок, для которого представление A также невозможно.

Поступило
15 VII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. А. Вайнштейн, ДАН, 57, № 5 (1947). ² W. Hurewicz, Proc. Sect. Sci., 30, № 1, 159 (1927). ³ Л. В. Келдыш, ДАН, 58, № 2 (1947).