Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР П. АЛЕКСАНДРОВ

ОБЩИЙ ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Обозначения. В этой работе мы обозначаем: через S^n — сферическое n-мерное пространство; через A, B — любые множества, лежащие в S^n; через p, q — неотрицательные целые числа; через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — коммутативные группы, причем $\mathfrak{A}$ — всегда дискретна, а $\mathfrak{B}$ — бикомпактна; через Π — непрерывную циклическую группу (фактор-группу группы действительных чисел по подгруппе целых); через W — произвольную окрестность нуля в Π.

Если A и B или $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, p и q рассматриваются одновременно, то предполагается: $B=S^n-A$; $p+q=n-1$; $\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B}$, где вертикальная черта означает двойственность в смысле Понтрягина. Покрытие множества A определяется как любая система $\sigma=\{o_i\}$ открытых в A множеств o_i, каждое из которых пересекается лишь с конечным числом множеств o_i и сумма которых есть множество A. Нерв покрытия σ обозначаем также через σ. Индексы α, β служат для различения элементов в частично упорядоченных множествах, причем пишем $\beta>\alpha$, чтобы указать, что элемент с индексом β следует за элементом с индексом α.

Рассматриваются следующие частично упорядоченные множества:

1) Множество всех покрытий σ_α множества A, причем $\beta>\alpha$, если каждое $o_{\beta j}\in\sigma_\beta$ содержится в некотором $o_{\alpha i}\in\sigma_\alpha$, но хотя бы одно $o_{\alpha i}$ не содержится ни в каком $o_{\beta j}$. Если $\beta>\alpha$, то, ставя в соответствие каждому $o_{\beta j}$ некоторое $o_{\alpha i}\supseteq o_{\beta j}$, получим симплициальное отображение σ_β в σ_α, которое так же как и определенный им гомоморфизм группы Бетти* $\Delta^p\sigma_\beta$ в группу Бетти $\Delta^p\sigma_\alpha$ обозначается через Ω_α^β.

2) Множество всех открытых в S^n множеств λ_α, содержащих множество A, причем $\beta>\alpha$, если $\lambda_\beta\subset\lambda_\alpha$.

3) Множество всех компактов $\psi_\alpha\subseteq B$, причем $\beta>\alpha$, если $\psi_\alpha\subset\psi_\beta$. Если λ_α и ψ_α рассматриваются одновременно, то $\lambda_\alpha=S^n-\psi_\alpha$.

В частично упорядоченных множествах $\{\lambda_\alpha\}$, соотв. $\{\psi_\alpha\}$, тождественное отображение λ_β в λ_α, соотв. ψ_α в ψ_β, порождает гомоморфизм вложения E_α^β (соотв. E_β^α) группы Бетти $\Delta^p\lambda_\beta$ в группу $\Delta^p\lambda_\alpha$, соотв. группы Бетти $\Delta^q\psi_\alpha$ в $\Delta^q\psi_\beta$, а также гомоморфизм высечения J_α^β группы $\nabla^q\psi_\beta$ в группу $\nabla^q\psi_\alpha$ (см. [1], n° 36).

2. Группы δ^pA и Δ_c^qB. Назовем проекционным циклом множества A систему $\{z_\alpha^p\}$ циклов z_α^p, по одному z_α^p на каждом σ_α, такую, что при $\beta>\alpha$ всегда $z_\alpha^p\sim\Omega_\alpha^\beta z_\beta^p$ в σ_α. Проекционный цикл $\{z_\alpha^p\}$ ограничивает в A, если $z_\alpha^p\sim 0$ в σ_α при любом α. Проекционные

* В этой работе рассматриваются только конечные цепи; в частности, всякий цикл (в σ_α или в λ_α) есть конечный цикл; он гомологичен нулю (в σ_α, соотв. λ_α), если ограничивает конечную цепь.

циклы при покоординатном сложении $\{z_\alpha^p\}+\{z_\alpha'^p\}=\{z_\alpha^p+z_\alpha'^p\}$ образуют группу Z^pA, в которой содержится подгруппа H^pA ограничивающих циклов. Фактор-группа Z^pA-H^pA обозначается через δ^pA и называется p-мерной дискретной группой Бетти множества A; область коэффициентов — любая $\mathfrak{A}$. Истинными циклами z_B^q множества B называются истинные циклы всевозможных $\psi_\alpha\subseteq B$, причем z_B^q компактно ограничивает в B, если $z_B^q\sim 0$ на некотором ψ_β. Область коэффициентов — $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$. Фактор-группа группы Z_c^qB всех истинных p-мерных циклов множества B по подгруппе H_c^qB компактно ограничивающих обозначается через Δ_c^qB („группа Бетти с компактными носителями"). По самому определению группы δ^pA и Δ_c^qB суть топологические инварианты соотв. множеств A и B.

3. Группа D^pA по области коэффициентов $\mathfrak{A}$ имеет вспомогательное назначение и определяется так. Скользящим циклом $z_{(A)}^p$ множества A называется система циклов $\{z_{(\alpha)}^p\}$, по одному циклу $z_{(\alpha)}^p$ в каждом λ_α, такая, что при $\lambda_\beta\subset\lambda_\alpha$ всегда $z_{(\beta)}^p\sim z_{(\alpha)}^p$ в λ_α. При покоординатном сложении скользящие $z_{(A)}^p$ образуют группу $Z^p(A)$, содержащую подгруппу $H^p(A)$ ограничивающих циклов, т. е. таких $z_{(A)}^p=\{z_{(\alpha)}^p\}$, что $z_{(\alpha)}^p\sim 0$ в λ_α при всяком α. Группа D^pA определяется как фактор-группа $Z^p(A)-H^p(A)$.

4. Группа Δ^qB. Для всякого истинного z_B^q и скользящего $z_{(A)}^p$ (области коэффициентов, соотв., $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$) определен коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(z_B^q, z_{(A)}^p)\in\Pi$. Назовем z_B^q незацепляемым, если для любого $z_{(A)}^p$ имеем $\mathfrak{v}(z_B^q, z_{(A)}^p)=0$. Незацепляемые z_B^q образуют подгруппу $Z_0^qB\supseteq H_c^qB$ группы Z_c^qB и определяют подгруппу Δ_0^qB группы Δ_c^qB. Фактор-группа $Z_c^qB-Z_0^qB=\Delta_c^qB-\Delta_0^qB$ обозначается через Δ'^qB. Для каждого $\mathfrak{z}^q\in\Delta'^qB$ определен коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}^q, z_{(A)}^p)$ с любым скользящим $z_{(A)}^p$ по формуле $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}^q, z_{(A)}^p)=\mathfrak{v}(z_B^q, z_{(A)}^p)$, где $z_B^q\in\mathfrak{z}^q$. В группу Δ'^qB вводим топологию, определяя следующим образом окрестности нулевого элемента: задаем произвольно $W\subset\Pi$ и конечное число скользящих циклов $z_{(1)}^p, \ldots, z_{(s)}^p$ множества A; определенная этими данными окрестность нуля в Δ'^qB состоит из всех $\mathfrak{z}^q\in\Delta'^qB$, для которых $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}^q, z_i^p)$ при всех $i=1, \ldots, s$.

5. Теоремы инвариантности и первая форма закона двойственности. Имеют место следующие теоремы инвариантности:

I. *Группа Δ_0^qB и топологическая группа Δ'^qB суть топологические инварианты множества B.*

II. *Группа Δ'^qB есть всюду плотная подгруппа однозначно определенной (этим требованием!) бикомпактной группы Δ^qB, которая, следовательно, является топологическим инвариантом множества B.*

Группа Δ^q называется q-мерной непрерывной группой Бетти множества B по области коэффициентов $\mathfrak{B}$.

Общий закон двойственности. Группы δ^pA и Δ^qB двойственны между собой

6. Изоморфизм $\delta^pA=D^pA$ составляет основную часть доказательства закона двойственности. Назовем триангуляцией всякий бесконечный симплициальный комплекс τ, являющийся евклидовым комплексом (в смысле ([2]), стр. 129) и удовлетворяющий условию,

что его тело $\tilde{\tau}$ (т. е. сумма всех его элементов) есть открытое множество $\lambda \supset A$. Триангуляции образуют частично упорядоченное множество $\{\tau_\alpha\}$, если положить $\beta > \alpha$, коль скоро каждый открытый симплекс $T_\beta \in \tau_\beta$ лежит в некотором $T_\alpha \in \tau_\alpha$; этот симплекс T_α называется носителем симплекса T_β в τ_α. При $\beta > \alpha$ определено симплициальное отображение s_α^β комплекса τ_β в τ_α, называемое естественным сдвигом и получающееся, если каждой вершине $e_\beta \in \tau_\beta$ поставить в соответствие какую-нибудь вершину e_α носителя вершины e_β в τ_α. Удаляя из данной триангуляции все (открытые) главные симплексы, не содержащие точек A, и повторяя, если нужно, эту операцию несколько раз, получим однозначно определенный евклидов подкомплекс $\varepsilon_\alpha = \varepsilon(\tau_\alpha)$ триангуляции τ_α, обладающей тем свойством, что $A \subseteq \tilde{\varepsilon}_\alpha$ и что каждый главный симплекс ε_α содержит точки A. Считая комплексы ε_α различными, если они имеют различные индексы, и перенося на них порядок, установленный в $\{\tau_\alpha\}$, получаем частично упорядоченное множество $\{\varepsilon_\alpha\}$, причем при $\beta > \alpha$ естественный сдвиг s_α^β отображает ε_β в ε_α. Поэтому имеем (см. [3], § 3) обратный спектр (дискретных) групп $\{\Delta^p \varepsilon_\alpha, s_\alpha^\beta\}$, предельная группа которого, определенная как в [3], § 3, но без топологии, обозначается через $d^p A$.

Покажем, что каждая из групп $\delta^p A$, $D^p A$ изоморфна группе $d^p A$. Обозначим через $\sigma'_\alpha = \sigma'(\tau_\alpha)$ покрытие, элементы которого суть пересечения с A открытых звезд вершин комплекса ε_α. Покрытие σ'_α имеет своим нервом комплекс ε_α. Изоморфизм $\delta^p A = d^p A$ легко следует из того, что покрытия σ'_α образуют конфинальную часть во множестве всех покрытий множества A.

Этот факт выводится из следующей леммы, доказательство которой представляет небольшое видоизменение доказательства так называемой теоремы Рунге, данного в [2], стр. 143—147: какова бы ни была система открытых в S^n множеств O_i, сумма этих множеств может быть триангулирована так, что каждая открытая звезда этой триангуляции содержится по крайней мере в одном из множеств O_i.

Для доказательства изоморфизма $D^p A = d^p A$ назовем симплекс $T_\alpha \in \varepsilon_\alpha$ обнаженным, если его звезда OT_α в τ_α не содержится в ε_α. Присоединим теперь к множеству $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ все симплексы двукратного барицентрического подразделения комплекса τ_α, примыкающие к обнаженному симплексу $T_\alpha \in \varepsilon_\alpha$ и лежащие на непринадлежащих комплексу ε_α симплексах звезды OT_α. Сделав это для всех обнаженных симплексов, получим открытое множество $\lambda'_\alpha = \lambda'(\tau_\alpha)$, причем полиэдр $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ является ретрактом множества λ'_α. Множества λ'_α образуют конфинальную часть частично упорядоченного множества $\{\lambda_\alpha\}$, причем $\tilde{\varepsilon}_\alpha$ и λ'_α имеют те же группы Бетти. Отсюда легко следует изоморфизм $d^p A = D^p A$.

7. Теория Чогошвили; вывод из нее теорем инвариантности и окончание доказательства закона двойственности. Каждый прямой спектр $\{Y_\alpha, \pi_\beta^\alpha\}$ бикомпактных групп Y_α с непрерывными гомоморфизмами π_β^α и предельной группой Y, определенной как в [3], § 3 (игнорируя топологию в Y_α), однозначно определяет обратный спектр $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ дискретных групп, где $X_\alpha | Y_\alpha$ и гомоморфизмы $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ суть гомоморфизмы, сопряженные гомоморфизмам π_β^α. Таким образом, и предельная группа X спектра $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, определенная как в [3], § 3 (но без топологии), и скалярное произведение $(x \cdot y)$ любых двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$ (определенное по формуле $(x \cdot y) = (x_\alpha \cdot y_\alpha)$, где $y_\alpha \in y$ и $x_\alpha \in x$) даны одним лишь знанием спектра

$\{Y_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}$. Этими же данными определена и подгруппа Y_0 группы Y, состоящая из всех тех $y \in Y$, для которых при любом выборе $x \in X$ имеем $(x \cdot y) = 0$, а значит, и фактор-группа $Y' = Y - Y_0$. Топологию в Y' вводим, определяя произвольную окрестность нулевого элемента как множество всех тех $y \in Y$, для которых при заданных в конечном числе $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, s$, и $W \subset \Pi$ имеем $(x_i \cdot y) \in W$. В этих условиях имеет место (см. ([4])):

Теорема Чогошвили. *При вышеприведенном определении скалярного умножения группа X есть группа всех (непрерывных) характеров группы Y', а группа Y' есть всюду плотная подгруппа бикомпактной группы $\overline{Y}$ всех характеров группы X.*

Полагая теперь $Y_\alpha = \Delta^q \psi_\alpha$, $\pi^\alpha_\beta = E^\alpha_\beta$, видим, что $Y_\alpha | X_\alpha = \Delta^p \lambda_\alpha$, так что $Y = \Delta^q_c B$, $X = D^p A$, откуда легко следует, что группы $\Delta^q_0 B$, $\Delta'^q B$, $\Delta^q B$ совпадают, соответственно, с определенными лишь спектром $\{Y_\alpha, E^\alpha_\beta\}$ и потому инвариантно связанными с множеством B группами Y_0, Y', $\overline{Y}$, чем теоремы инвариантности доказаны. А так как, по теореме Чогошвили, $\overline{Y} | X$, то $\Delta^q B | D^p A = \delta^p A$, чем доказан и закон двойственности.

8. Вторая форма закона двойственности. А. Н. Колмогоров обратил мое внимание на то, что, минуя теорию Чогошвили и пользуясь с самого начала лишь топологически инвариантными терминами, можно записать общий закон двойственности в виде изоморфизма

$$\delta^p A = \nabla^q B,$$

где $\nabla^q B$ есть предельная группа обратного спектра $\{\nabla^q \psi_\alpha, J^\beta_\alpha\}$ и область коэффициентов и справа и слева есть $\mathfrak{A}$.

В самом деле, в силу элементарного оператора двойственности ΔD^{p+1} (см. ([1]), § 13, п. 46) группа $\nabla^q \psi_\alpha$ отображается изоморфно на группу $\Delta^p \lambda_\alpha$, так что получается изоморфизм $\nabla^q B = D^p A = \delta^p A$, ч. и т. д.

9. Нульмерный случай закона двойственности и теорема Эйленберга. Ранг группы $\delta^p A$ (взятой, например, по модулю 2) определяет (конечное или равное ∞) число компонент множества A. Таким образом, частным случаем закона двойственности является следующее предложение, впервые доказанное Эйленбергом ([5]):

Если B и B' — два гомеоморфные множества в S^n, то их дополнения состоят из того же числа компонент.

Поступило
19 V 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Изв. АН СССР, сер. математ., 6, в. 5, 227 (1942). [2] P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie, I, 1935. [3] П. Александров, Уч. зап. Моск. гос. ун-та, 45, 1 (1940). [4] Г. С. Чогошвили, Диссертация, Математическ. ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова, 1946; ДАН, 46, 131 (1945). [5] S. Eilenberg, Bull. Am. Math. Soc., 47, 73 (1941).