

И. П. НАТАНСОН

**ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XII 1946)

Теорема. Пусть на сегменте  $[a, b]$  дана суммируемая функция  $f(x)$ , обладающая тем свойством, что

$$\sup \left\{ \frac{1}{h} \left| \int_a^{a+h} f(x) dx \right| \right\} = M < +\infty \quad (0 < h \leq b - a). \quad (1)$$

Какова бы ни была\* неотрицательная убывающая функция  $g(x)$ , заданная и суммируемая на  $[a, b]$ , интеграл

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \quad (2)$$

существует (как несобственный при  $x = a$ ) и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (3)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно принять, что  $g(b) = 0$ , ибо, если бы это условие не соблюдалось, то мы просто изменили бы значение функции  $g(x)$  в точке  $x = b$ , положив  $g(b) = 0$ .

Это изменение не отразилось бы ни на величине интересующих нас интегралов, ни на свойствах функции  $g(x)$ .

Пусть  $a < \alpha < b$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) dF(x),$$

где положено

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Применяя к полученному интегралу Стильеса формулу интегрирования по частям, находим

\* Случай  $g(a) = +\infty$  мы не исключаем.

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = -F(\alpha) g(\alpha) + \int_a^b F(x) d[-g(x)]. \quad (4)$$

Но, в силу (1), мы имеем, что

$$|F(x)| \leq M(x-a), \quad (5)$$

а так как  $g(x)$  убывает, то

$$g(\alpha)(\alpha-a) \leq \int_a^{\alpha} g(x) dx. \quad (6)$$

Поэтому

$$|F(\alpha) g(\alpha)| \leq M \int_a^{\alpha} g(x) dx. \quad (7)$$

С другой стороны, в силу (5) и того обстоятельства, что  $-g(x)$  возрастает, мы имеем

$$\left| \int_a^b F(x) d[-g(x)] \right| \leq M \int_a^b (x-a) d[-g(x)].$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство (6), получим

$$\int_a^b (x-a) d[-g(x)] = g(\alpha)(\alpha-a) + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Таким образом,

$$\left| \int_a^b F(x) d[-g(x)] \right| \leq M \int_a^b g(x) dx,$$

откуда, в связи с (4) и (7), вытекает оценка

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq M \left\{ \int_a^{\alpha} g(x) dx + \int_a^{\alpha} g(x) dx \right\}. \quad (8)$$

Если здесь заменить  $b$  на  $\beta$ , где  $\alpha < \beta < b$ , и устремить  $\alpha$  и  $\beta$  к  $a$ , то окажется, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_a^{\beta} f(x) g(x) dx = 0,$$

откуда и вытекает существование интеграла (2). Чтобы получить неравенство (3), остается перейти к пределу в неравенстве (8), устремив  $\alpha$  к  $a$ .

Замечание 1. Оценка (3) точная, ибо при  $f(x) \equiv 1$  левая и правая части (3) совпадают.

Замечание 2. В 1937 г. я установил <sup>(1)</sup> более слабое неравенство

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \leq 4M \int_a^b g(x) dx, \quad (9)$$

предполагая функцию  $f(x)$  положительной. С помощью этого неравенства было дано новое доказательство теоремы Д. К. Фаддеева <sup>(2)</sup>

о представлении функций сингулярными интегралами в точках, где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0.$$

Так как неравенство (3) теперь доказано без предположения, что функция  $f(x)$  положительна, то тем же методом можно доказать и теорему П. И. Романовского<sup>(3)</sup> о представлении функций сингулярными интегралами в точках, где представляемая функция является производной своего неопределенного интеграла. Неравенство (9) оказалось полезным также при исследовании некоторых вопросов, связанных с нелокальной сходимостью сингулярных интегралов<sup>(4)</sup>. И здесь целесообразно вместо (9) использовать неравенство (3).

Поступило  
23 XII 1946

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> И. П. Натансон, Тр. ЛИИ, № 4, 39 (1937). <sup>2</sup> Д. К. Фадеев, Мат. сб., 1 (43), 352 (1936). <sup>3</sup> M. Paul Romanovski, Math. Z., 34, 35 (1931). <sup>4</sup> И. П. Натансон, ДАН, 19, № 5, 357 (1938).