Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 8

МАТЕМАТИКА

В. А. ДИТКИН

# К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1946)*

Пусть $U_t^a$ и $U_t^b$ — однопараметрические группы унитарных операторов в пространстве Гильберта и $A$ и $B$ — соответствующие им эрмитовы операторы, т. е. $e^{itA} = U_t^a$ и $e^{itB} = U_t^b$. Мы будем предполагать, что при всех $t$ и $\tau$

$$U_t^a U_\tau^b = e^{-it\tau} U_\tau^b U_t^a. \tag{1}$$

В этом случае можно доказать:

$$A\Phi(B) f = \Phi(B) Af + i\Phi'(B) f \tag{2}$$

при условии, что $\Phi(\xi)$ дифференцируема, операторы $\Phi(B)$ и $\Phi'(B)$ ограниченные и $f \in \Omega_A$ — области определения оператора $A$. Методом индукции нетрудно доказать, что если существует $d^n\Phi(\xi)/d\xi^n = \Phi^{(n)}(\xi)$ и операторы $\Phi^{(k)}(B)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$ ограничены, то $\Phi(B) f \in \Omega_{A^n}$ — области определения оператора $A^n$, если только $f \in \Omega_{A^n}$.

Равенства (1), (2) и некоторые обобщения их хорошо известны. Рассмотрим оператор

$$P = A - i\frac{\Phi'(B)}{\Phi(B)}. \tag{3}$$

Обозначим через $\Omega$ множество элементов пространства, обладающих тем свойством, что если $f \in \Omega$, то $f$ принадлежит к области определения операторов $A$ и $P$ и $Af \in \Omega$, $Pf \in \Omega$. Докажем формулу

$$\Phi(B) H(A) f = \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} \Phi^{(n)}(B) H^{(n)}(P) f. \tag{4}$$

в предположении, что $f \in \Omega$, $H(\xi)$ есть полином, $\Phi(\xi)$ дифференцируема достаточное число раз и все операторы $\Phi(B)$, $\Phi'(B)$, $\Phi''(B), \ldots$ ограниченные. Допустим, что (4) справедливо для некоторого полинома $H(\xi)$ и любой функции $\Phi(\xi)$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям. Умножим слева обе части равенства (4) на оператор $A$ и воспользуемся равенством (2), тогда

$$[\Phi(B) A + i\Phi'(B)] H(A) f = \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} [\Phi^{(n)}(B) A + i\Phi^{(n+1)}(B)] H^{(n)}(P) f.$$

Далее

$$i\Phi'(B) H(A) = i\frac{\Phi'(B)}{\Phi(B)} \Phi(B) H(A) f = i\frac{\Phi'(B)}{\Phi(B)} \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} \Phi^{(n)}(B) H^{(n)}(P) f,$$

поэтому

$$\Phi(B)AH(A)f = \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!}\Phi^{(n)}(B)\left[A - i\frac{\Phi'(B)}{\Phi(B)}\right]H^{(n)}(P)f +$$

$$+\sum_{n=0}\frac{i^{n+1}}{n!}\Phi^{(n+1)}(B)H^{(n)}(P)f = \sum_{n=0}\frac{i^n}{n!}\Phi^{(n)}(B)\left[\xi H(\xi)\right]^{(n)}_{\xi=P},$$

т. е. (4) справедливо для полинома $\xi H(\xi)$. Но для $H(\xi)=\xi$ это равенство является тривиальным.

Очевидно, предельным переходом можно обобщить (4) на неограниченные операторы $\Phi^{(k)}(B)$.

Обозначим $L^2_\omega$ пространство Гильберта со скалярным произведением

$$(f, g)_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,\overline{g(x)}}{|\omega(x)|^2}\,dx, \quad |\omega(x)| \geqslant 1.$$

Для $\omega(x)\equiv 1$ $L^2_\omega \equiv L^2$.

Введем в $L^2_\omega$ операторы $Df = i\frac{d}{dx}f(x)$, $Mf = xf(x)$. В пространстве $L^2$ операторы $D$ и $M$ эрмитовы. Полагая $A=D$ и $B=M$, нетрудно видеть, что соответствующие им операторы $U^a_t$ и $U^b_t$ удовлетворяют условию (1), и поэтому равенство (4) справедливо. Следовательно,

$$\omega(x)H(D)f = \sum_{n=0}\frac{i^n}{n!}\omega^{(n)}(x)H^{(n)}(P)f, \tag{5}$$

где $H(\xi)$ — полином, $P = D - i\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}$, $f(x)\in L^2$ и имеет достаточное число производных.

Оператор $D$ в $L^2_\omega$ $(\omega \neq 1)$ не будет самосопряженным, но оператор $P$ будет самосопряженным и даже эрмитовым, а в этом случае, как хорошо известно, можно определить оператор $G(P)$ для весьма широкого класса функций. Вычисления показывают, что

$$G(P)f = \omega(x)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,G(t)\,e^{-ixt}dt,$$

где

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{\omega(x)}\,e^{ixt}dx. \tag{6}$$

Поэтому из (5) мы получим

$$H(D)f = \sum_{n=0}\frac{i^n\omega^{(n)}(x)}{n!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(t)\,H^{(n)}(t)\,e^{-ixt}dt. \tag{7}$$

Эта формула позволяет расширить определение оператора $H(D)f$ с полиномов $H(\xi)$ на более широкие классы функций $H(\xi)$. Этот класс, конечно, зависит от выбора $\omega(x)$. Рассмотрим в качестве примера случай, когда $\omega(x) = (1+ix)^n$, $n$ — целое положительное число [1]. Тогда

$$(f, g)_\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)\,\overline{g(x)}}{(1+x^2)^n}\,dx. \tag{8}$$

Это пространство функций мы будем обозначать $L^2_n$.

Положим в (7) $\omega(x) = (1 + ix)^n$, тогда

$$H(D) f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 + ix)^{n-k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) H^{(k)}(t) e^{-ixt} dt, \tag{9}$$

где $f^{(k)}(x) \in L_n^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{(1 + ix)^n} e^{ixt} dx. \tag{10}$$

Воспользуемся известными свойствами интеграла Фурье и

$$\frac{1}{(1 + ix)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t - ixt} dt.$$

Тогда

$$\frac{H(D) f(x)}{(1 + ix)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F(t) H(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{t} (t - \xi)^{k-1} e^{-(t-\xi)} F(\xi) H^{(k)}(\xi) d\xi \right\} e^{-ixt} dt. \tag{11}$$

Следовательно, определение $H(D)$ возможно дать для функций, принадлежащих к множеству $C^{(n)}$ — $n$ раз дифференцируемых. В этом случае для функции $f \in L_n^2$ и удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(t) H(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{(k-1)!} \int_{-\infty}^{t} (t - \xi)^{k-1} e^{-(t-\xi)} F(\xi) H^{(k)}(\xi) d\xi \right|^2 dt < \infty \tag{12}$$

определен оператор $H(D) f$, и его значение снова принадлежит и пространству $L_n^2$.

Нетрудно показать, что

$$\| H(D) f \|_{\omega} \leqslant \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} | F(t) H^{(k)}(t) |^2 dt}\,.$$

В частности, если $\sup_t | H^{(k)}(t) | < \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то

$$\| H(D) f \|_{\omega} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sup_t | H^{(k)}(t) | \cdot \| f \|_{\omega}, \tag{13}$$

т. е. оператор $H(D)$ ограниченный. В этом случае

$$H_2(D) \{ H_1(D) f \} = \{ H_2(D) H_1(D) \} f, \tag{14}$$

и нетрудно это равенство обобщить на любые операторы.

Обратимся к решению уравнения

$$H(D) f = 0. \tag{15}$$

Из равенства (11) следует

$$F(t)H(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(k-1)!}\int_{-\infty}^{t}(t-\xi)^{k-1}e^{-(t-\xi)}F(\xi)H^{(k)}(\xi)\,d\xi=0 \qquad (16)$$

для почти всех $t$. Если $t=t_0$ выбрано так, что $H(t_0)\neq 0$, то вычисления показывают, что в окрестности $t_0$ почти всюду

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^t F(t))=0. \qquad (17)$$

Поэтому, если $H(t)\neq 0$ для всех вещественных $t$, то уравнение (15) не имеет решения, кроме тривиального (речь идет о решениях, принадлежащих к $L_n^2$).

В нашем случае оператор $P=D+\frac{n}{1+ix}$ (см. (3)), спектральная функция оператора $P$ равна

$$E(P,\Delta)f=(1+ix)^n\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}F(t)e^{-ixt}dt. \qquad (18)$$

Из (18) следует

$$H(D)\{E(P,\Delta)f\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1+ix)^{n-k}\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta}F(t)H^{(k)}(t)e^{-ixt}dt. \qquad (19)$$

Из последнего равенства видно, что если $H(\xi)=0$ для $a\leqslant\xi\leqslant b$, то функция $g(x)=E(P,\Delta)f$, где $\Delta=(a,b)$ и $f\in L_n^2$, удовлетворяет уравнению (15). Более детальное исследование показывает, что если вне сегмента $[a,b]$ $H(\xi)$ нигде не равна нулю, то всякое решение уравнения (15) имеет вид

$$f(x)=(1+ix)^n\frac{1}{2\pi}\int_a^b G(t)e^{-ixt}dt+e^{ibx}\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k, \qquad (20)$$

где $a_k$ — произвольные постоянные, $G(t)$ подчинена единственному условию $\int_a^b|G(t)|^2dt<\infty$. Если $a=b$, то $f(x)=e^{iax}\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^k$, где $p$ — кратность нуля $a=b$ функции $H(\xi)$.

Пользуясь последним результатом, можно доказать, что всякая функция, имеющая производную любого порядка и удовлетворяющая неравенству

$$\|D^rf\|_\omega\leqslant Q(a+\delta)^r, \qquad (21)$$

где $a>0$, $\delta$ — любое положительное число, $Q$ — константа, зависящая от $\delta$, $n$ и $f$, имеет вид:

$$f(x)=(1+ix)^n\int_{-a}^{a}G(t)e^{-ixt}dt+e^{iax}\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k,\quad \int_{-a}^{a}|G(t)|^2dt<\infty. \qquad (22)$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
17 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener, Math. Ann., 95, 557 (1925).