

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. Е. ЖАБОТИНСКИЙ

**О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 23 XI 1946)

При исследовании распределенных автономных автоколебательных систем с малой нелинейностью встречаются нелинейные дифференциальные уравнения, отличающиеся следующими свойствами: их нелинейные и диссипативные члены малы и имеют одинаковый порядок малости относительно некоторого малого параметра, а члены, не содержащие малого параметра, обычно могут быть представлены в виде линейного самосопряженного оператора относительно пространственных координат и члена, содержащего вторую производную по времени. Граничные условия в этих задачах обладают такими же свойствами. Целью исследования является отыскание стационарных решений и исследование устойчивости полученных решений.

В данной статье излагается приближенный метод рассмотрения подобных задач*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L[y] - \rho y_{tt} = \mu f(y, x, \mu)$$

с граничным условием

$$\Lambda[\bar{y}] + \bar{y}_{tt} = \mu F(\bar{y}, \bar{x}, \mu),$$

заданным на границе $\varphi(x) = 0$.

Мы ограничиваемся случаем слабой нелинейности. Нелинейные и диссипативные члены уравнений вынесены в их правые части и имеют в качестве общего множителя малый параметр μ .

Здесь и в дальнейшем x означает совокупность трех переменных x_1, x_2, x_3 . Чертой обозначены значения, принимаемые переменными на границе области. Выражение $L[y]$ представляет собой трехмерный линейный самосопряженный оператор вида:

$$L[y] = (\rho y_{x_1})_{x_1} + (\rho y_{x_2})_{x_2} + (\rho y_{x_3})_{x_3} - qy.$$

ρ, q и ρ являются аналитическими функциями x_1, x_2, x_3 , а $f(y, x, \mu)$ и $F(y, x, \mu)$ — аналитическими функциями x_1, x_2, x_3, y , первых производных от y , а также от параметра μ . $\Lambda[y]$ является линейным оператором относительно x_1, x_2, x_3 .

Для решения поставленной краевой задачи целесообразно воспользоваться методом малого параметра.

Линейная задача, получающаяся из данной при $\mu = 0$, представляет

* Частный случай одномерной распределенной системы (автоколебания в системе Лехера) рассмотрен в работах А. А. Витта (*) и С. Стрелкова (*).

собой задачу Штурма — Лиувилля и может быть решена обычными методами (1). Эта задача имеет частное решение вида

$$y_n = u_n(\omega_n x) \cos \omega_n t,$$

где ω_n представляет собой спектр собственных значений этой линейной задачи. Индекс n здесь и в дальнейшем включает в себя три независимых индекса. Функции u_n мы предполагаем ортогональными и нормированными в единицу.

Будем искать те решения исходной нелинейной задачи, которые при достаточно малом μ достаточно близки к решениям линейной задачи, получающейся из данной при $\mu = 0$.

Для этого запишем искомые решения в виде рядов по μ :

$$Y_n = A_n u_n \cos \lambda_n t + \mu \sum_k [P_{kn} \sin k \lambda_n t + Q_{kn} \cos k \lambda_n t] + \\ + \mu^2 \sum_k [R_{kn} \sin k \lambda_n t + S_{kn} \cos k \lambda_n t] + \dots, \quad (1)$$

где $\lambda_n = \omega_n + \mu \varepsilon_n + \mu^2 \nu_n + \dots$; $u_n, P_{kn}, Q_{kn}, R_{kn}, S_{kn}$ представляют собой функции от аргумента $\omega_n x$, а A_n означает неопределенную пока амплитуду нулевого приближения*.

Подставим ряд (1) в исходное уравнение и граничное условие, разложим правые части полученных уравнений в ряды Фурье по $\sin k \lambda_n t$ и $\cos k \lambda_n t$, а коэффициенты этих рядов разложим в ряды по малому параметру μ . Объединив в правых частях члены при одинаковых гармониках, ограничиваясь всюду членами второго порядка относительно μ , получим:

$$\{A_n L[u_n] + A_n \rho \omega_n^2 u_n + 2\mu A_n \rho \omega_n \varepsilon_n u_n + \mu^2 A_n \rho (\varepsilon_n^2 + 2\omega_n \nu_n) u_n\} \cos \lambda_n t + \\ + \sum_k \left\{ \mu [L[P_{kn}] + \rho k^2 \omega_n^2 P_{kn}] \sin k \lambda_n t + \mu [L[Q_{kn}] + \rho k^2 \omega_n^2 Q_{kn}] \cos k \lambda_n t + \right. \\ \left. + \mu^2 [L[R_{kn}] + \rho k^2 \omega_n^2 R_{kn} + 2\rho k^2 \omega_n \varepsilon_n P_{kn}] \sin k \lambda_n t + \right. \\ \left. + \mu^2 [L[S_{kn}] + \rho k^2 \omega_n^2 S_{kn} + 2\rho k^2 \omega_n \varepsilon_n Q_{kn}] \cos k \lambda_n t \right\} = \\ = \sum_k \left\{ (\mu A_{kn} + \mu^2 B_{kn}) \sin k \lambda_n t + (\mu C_{kn} + \mu^2 D_{kn}) \cos k \lambda_n t \right\}, \\ \{A_n \Lambda[\bar{u}_n] - A_n \omega_n^2 \bar{u}_n - 2\mu A_n \omega_n \varepsilon_n \bar{u}_n - \mu^2 A_n (\varepsilon_n^2 + 2\omega_n \nu_n) \bar{u}_n\} \cos \lambda_n t + \\ + \sum_k \left\{ \mu [\Lambda[\bar{P}_{kn}] - k^2 \omega_n^2 \bar{P}_{kn}] \sin k \lambda_n t + \mu [\Lambda[\bar{Q}_{kn}] - k^2 \omega_n^2 \bar{Q}_{kn}] \cos k \lambda_n t + \right. \\ \left. + \mu^2 [\Lambda[\bar{R}_{kn}] - k^2 \omega_n^2 \bar{R}_{kn} - 2k^2 \omega_n \varepsilon_n \bar{P}_{kn}] \sin k \lambda_n t + \right. \\ \left. + \mu^2 [\Lambda[\bar{S}_{kn}] - k^2 \omega_n^2 \bar{S}_{kn} - 2k^2 \omega_n \varepsilon_n \bar{Q}_{kn}] \cos k \lambda_n t \right\} = \\ = \sum_k \left\{ (\mu \bar{A}_{kn} + \mu^2 \bar{B}_{kn}) \sin k \lambda_n t + (\mu \bar{C}_{kn} + \mu^2 \bar{D}_{kn}) \cos k \lambda_n t \right\}.$$

* Наш выбор аргумента пространственных функций в виде $\omega_n x$ приводит к более простым выкладкам, чем второй возможный выбор аргумента этих функций в виде $\lambda_n x$. Оба пути, конечно, допустимы. Первый дает решение в виде ряда по пространственным функциям неисправленного периода, но этот ряд содержит "секулярные" члены. Вторым путем дает решение в виде ряда по функциям исправленного периода и, конечно, не имеет этих членов.

Приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при членах, содержащих одинаковые степени μ и одинаковые тригонометрические функции времени, получим системы уравнений Штурма — Лиувилля с граничными условиями.

Выпишем уравнения, получающиеся из членов, содержащих $\mu \sin \lambda_n t$:

$$L[P_{1n}] + \rho \omega_n^2 P_{1n} = A_{1n}, \quad \Lambda[\bar{P}_{1n}] - \omega_n^2 \bar{P}_{1n} = \bar{A}_{1n}. \quad (A)$$

Условием совместности этой системы является выражение

$$\int_G A_{1n} u_n dV - \oint_{\Gamma} P \left[u_n \frac{\partial P_{1n}}{\partial n} - P_{1n} \frac{\partial u_n}{\partial n} \right] dS = 0.$$

Это выражение представляет собой обыкновенное уравнение, содержащее только одну неизвестную величину A_n , — таким образом оно является выражением, определяющим амплитуду искомого периодического решения в нулевом порядке.

Члены с $\mu \cos \lambda_n t$ дают

$$\begin{aligned} L[Q_{1n}] + \rho \omega_n^2 Q_{1n} &= C_{1n} - \varepsilon_n \cdot 2 A_n \rho \omega_n u_n, \\ \Lambda[\bar{Q}_{1n}] - \omega_n^2 \bar{Q}_{1n} &= \bar{C}_{1n} + \varepsilon_n \cdot 2 A_n \omega_n \bar{u}_n. \end{aligned} \quad (B)$$

Условие совместности этой системы дает обыкновенное уравнение

$$\int_G (C_{1n} - \varepsilon_n \cdot 2 A_n \rho \omega_n u_n) u_n dV - \oint_{\Gamma} P \left[u_n \frac{\partial Q_{1n}}{\partial n} - Q_{1n} \frac{\partial u_n}{\partial n} \right] dS = 0,$$

определяющее ε_n — первую поправку к частоте.

Для нахождения следующих членов ряда (1) нужно общеизвестными методами найти частные решения систем (A) и (B) и систем, получающихся приравниванием коэффициентов при членах с $\mu \sin k \lambda_n t$ и $\mu \cos \lambda_n t$. Дальнейшие операции производятся по описанной схеме.

Для исследования устойчивости полученных решений в смысле Ляпунова следует, как обычно, рассмотреть

$$y_n = Y_n + z,$$

где Y_n — найденное периодическое решение, а z — малое возмущение ⁽²⁾.

Подставляя y_n в исходную систему и разлагая правые части в ряды по малому возмущению z при фиксированном μ , получим, пренебрегая членами высших порядков относительно z , так называемые уравнения первого приближения, представляющие собой линейные уравнения с периодическими коэффициентами.

Их решения ищем с помощью подстановки

$$z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l B_{kl}(x) e \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \gamma_m + ik\omega \right] t.$$

Подставим ряд в уравнения первого приближения и разложим правые части этих уравнений в ряды Фурье.

Сравнивая коэффициенты при членах, содержащих одинаковые порядки μ и одинаковые значения k , получим, отбрасывая экспоненциальные члены, системы уравнений с граничными условиями для определения B_{kl} и γ_m .

Члены с μ^0 и $k = 0$ дадут:

$$B_{00} = b_{00} u_n(\omega_n x), \quad \gamma_0^2 = -\omega_n^2.$$

Таким образом, решение вопроса об устойчивости здесь, как и обычно, приходится искать в следующих порядках.

Члены с μ^0 и $k \neq 0$ дадут различные результаты в зависимости от того, исследуем ли мы устойчивость по отношению к возмущающей силе резонансной частоты или же возмущающая сила не является резонансной.

Во втором случае $\omega \neq \omega_n$, и мы получим

$$B_{k \neq 0, 0} = 0.$$

В первом случае $\omega = \omega_n$, и мы получим, в зависимости от выбора знака в выражении $\gamma_0 = \pm i\omega_n$: в случае $\gamma_0 = i\omega_n$

$$B_{-2, 0} = b_{-2, 0} u_n(\omega_n x),$$

а в случае $\gamma_0 = -i\omega_n$

$$B_{2, 0} = b_{2, 0} u_n(\omega_n x).$$

Все остальные $B_{k, 0}$ в обоих случаях равны нулю.

При дальнейшем исследовании следует фиксировать выбор знака, например выбрать $\gamma_0 = i\omega_n$.

Дальнейшее исследование существенно зависит от того, является ли возмущающая сила резонансной.

Если резонанса нет, то уравнение и граничное условие, получаемое из членов, содержащих μ при $k = 0$, содержат только один произвольный параметр b_{00} . В этом случае коэффициент γ_1 , решающий вопрос об устойчивости, может быть непосредственно определен из условия ортогональности, примененного к этой системе.

В случае резонанса в эти уравнения входит еще один параметр (при нашем выборе знака $b_{-2, 0}$). Поэтому для определения γ_1 следует приравнять коэффициенты и при членах, содержащих μ и $k = -2$. Условие ортогональности, примененное к полученной при этом системе, дает второе алгебраическое уравнение, нужное для определения γ_1 .

Изложенный метод легко может быть расширен и на системы нескольких уравнений. Такое развитие для случая двух связанных распределенных систем проведено автором.

Здесь мы не затрагивали вопросов сходимости получаемых разложений. Решение этого вопроса в общем случае связано с большими трудностями и нами не проведено. При ряде ограничений, накладываемых на правые (нелинейные) части, оценка сходимости может быть проведена.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору С. М. Рытову за внимательное руководство при проведении этой работы.

Поступило
23 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1934, стр. 275, 306 и 2, 1945, стр. 248. ² А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935. ³ А. А. Витт, ЖТФ, 4, 144 (1934). ⁴ С. Стрелков, Techn. Phys. of USSR, 2, 232 (1935).