Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 5

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

О ЛОГИЧЕСКИХ ПАРАДОКСАХ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 21 XI 1946)

Как известно, теория множеств, не связанная никакими ограничениями в вопросе о возможности соединения элементов в множество, приводит к противоречиям. Противоречия той же природы имеют место в логических системах, в которых возможны любые высказывания о высказываниях без всяких ограничений.

Такой системой является расширенное логическое исчисление Ресселя. Рессель высказал вместе с тем определенную точку зрения относительно логических антиномий. Эта точка зрения состоит в том, что определения логических функций или предикатов в расширенной системе содержат порочный круг, именно: область вещей, которыми определяется данный предикат, уже сама этот предикат содержит.

Однако возможна и существует другая точка зрения: определения предикатов в системе Ресселя можно рассматривать как аксиомы существования. Такая точка зрения высказана в работе Д. А. Бочвара (1). Тогда возникает вопрос о том, какие аксиомы этого типа приводят к противоречию, какие нет. В упомянутой работе Д. А. Бочвар показал, что если в расширенном ресселевском исчислении совсем не употреблять этих аксиом-определений, то такая система непротиворечива; назовем ее абсолютной логической системой Ресселя. Аксиомы, определяющие предикаты, могут иметь вид

$$\mathrm{E}p\,(x_1)\,(x_2)\ldots(x_n)\,[p\,(x_1,\ldots,x_n)\sim G\,(x_1,\ldots,x_n)],$$

где G — какая-нибудь формула, не имеющая свободных переменных, кроме $x_1,\ldots,x_n$. Эти аксиомы-определения могут быть выражены и в другой форме: $p\,(x_1,\ldots,x_n)\sim G\,(x_1,\ldots,x_n)$, где $p\,(x_1,\ldots,x_n)$ — индивидуальный предикат.

Оказывается, возможно указать тип аксиом, которые можно без противоречия присоединить к абсолютной системе в любом количестве. Это следует из теоремы 1. Мы будем говорить, что переменная занимает внутреннее место, если она входит под знак элементарного предиката, в противном случае будем говорить, что она занимает внешнее место.

Теорема 1. *Система, образованная присоединением к абсолютной системе аксиом вида* $(\mathrm{E}p)\,(x_1)\ldots(x_n)\,[p\,(x_1,\ldots,x_n)\sim G\,(x_1,\ldots,x_n)]$, *непротиворечива, если каждое переменное в данной формуле занимает либо только внутренние места, либо только внешние.*

Логическую систему, образованную присоединением к абсолютной системе аксиом указанного типа, будем называть системой (T).

Рассмотрим такое определение: $p(x) \underset{\text{p.d.}}{\sim} \bar{x}(x) R$, где R есть некоторое суждение. Тогда следствием формулы $p(x) \sim R\bar{x}(x)$ будет истинность формулы $\bar{R}$, т. е. из гипотезы существования предиката p следует ложность суждения $\bar{R}$. Легко доказать, что если R не является истинной формулой в абсолютной системе, то присоединение аксиомы $p(x) \sim \bar{x}(x) R$ к абсолютной системе к противоречию не ведет, но в этой новой системе формула $\bar{R}$ является доказуемой. Отсюда следует, что для любого утверждения найдутся такие „определения" вида $p(x) \underset{\text{p.d.}}{\sim} G(x)$, которые позволят это утверждение доказать.

Возможность таких „доказательств" происходит явным образом из того же источника, что и противоречия, и также связана с неправильным пониманием выражения $p(x) \sim G(x)$, как определения предиката p.

При понимании же формулы $p(x) \sim R\bar{x}(x)$ как аксиомы существования предиката p утверждение истинности R является просто условием непротиворечивости данного предиката. Такие доказательства мы называем парадоксальными; они имеют связь с вопросом о непротиворечивости систем аксиом указанного типа.

Пусть $p(x)$ — некоторый индивидуальный предикат. Каждую формулу $G(x)$ можно путем эквивалентных преобразований представить в виде $G_1(x)\,x(x) \vee G_2(x)\,\bar{x}(x) \vee G_3(x)$ таким образом, что формулы $G_1(x)$, $G_2(x)$ и $G_3(x)$ однозначно определяются формулой $G(x)$. Тогда формулу $G_1(p) \vee \bar{G}_2(p) \vee G_3(p)$ назовем парадоксальным следствием предиката, определенного формулой $p(x) \underset{\text{p.d.}}{\sim} G(x)$. Легко показать, что из аксиомы $p(x) \sim G(x)$ формула $G_1(p) \vee \bar{G}_2(p) \vee G_3(p)$ действительно следует.

Назовем индивидуальный предикат p предикатом типа (S), если он определен выражением $p(x) \sim G(x)$, где формула $G(x)$ обладает тем свойством, что каждое связанное переменное этой формулы занимает либо только внутренние места, либо только внешние. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Если парадоксальные следствия некоторых формул $p(x) \sim G(x)$, где p — предикаты типа (S), выводимые в некоторой системе (T), то присоединение формул $p(x) \sim G(x)$ к любой системе (T) не ведет к противоречию.*

Из приведенных теорем вытекает, что определения постоянных предикатов, например $p(x) = 1$ (1 есть истина), определения тождества, рефлексивности, транзитивности, а также определения целых чисел к противоречию не приводят.

Рассмотрим вопрос о том, какие предикаты с одним переменным противоречивы. Если этот вопрос понимать в том смысле, что требуется указать способ, позволяющий для каждой формулы $p(x) \sim G(x)$ узнать, противоречива она или нет, то задача эта сводится к проблеме разрешимости. Однако вопрос об условиях противоречивости можно поставить с другой точки зрения. Назовем два предиката $p_1(x)$ и $p_2(x)$ эквивалентными, если в абсолютной системе доказуема формула $(x)[p_1(x) \sim p_2(x)]$.

Возникает следующий вопрос: описать такой класс противоречивых предикатов, что, каков бы ни был противоречивый предикат, в описанном классе для него найдется эквивалентный. Мы укажем условия, позволяющие находить различные противоречивые предикаты с одним переменным.

Каждую формулу $G(x)$ можно представить в форме $G_1(x)\,\bar{x}(x) \vee \vee G_2(x)$. В данном случае можно взять любое такое представление.

Если предикат $p(x) \sim G(x)$ приводит к противоречию, то формула $(\mathrm{E}x)[\bar{p}(x) \sim G(x)]$ доказуема в абсолютной системе. Тогда доказуема эквивалентная ей формула $(\mathrm{E}x)[\bar{p}(x) \sim G(x)] \vee [p(p) \sim G(p)]$. Совершая элементарные эквивалентные преобразования, мы показываем, что это равносильно доказуемости двух следующих формул:

$$(\mathrm{E}x)[\bar{p}(x) G_1(x) \bar{x}(x) \vee \bar{p}(x) G_2(x) \vee p(x) \bar{G}_1(x) \bar{G}_2(x) \vee p(x) \bar{G}_2(x) x(x)] \vee \vee p(p) \vee G_1(p) \vee G_2(p), \tag{1}$$

$$(\mathrm{E}x)[\bar{p}(x) G_1(x) \bar{x}(x) \vee \bar{p}(x) G_2(x) \vee p(x) \bar{G}_1(x) \bar{G}_2(x) \vee p(x) \bar{G}_2(x) x(x)] \vee \vee \bar{p}(p) \vee \bar{G}_2(p). \tag{2}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы предикат $p(x)$ был противоречив. Укажем, каким образом эти условия позволяют находить противоречивые предикаты. Рассмотрим предикаты более сильные, чем $p(x) \sim \bar{x}(x)$. Каждый такой предикат может быть приведен к виду $p(x) \sim \bar{x}(x) R(x)$. Иными словами, в формуле $G_1(x) \bar{x}(x) \vee G_2(x)$ надо положить $G_2(x)$ абсолютно ложной формулой, а $G_1(x)$ заменить $R(x)$. Тогда второе условие будет истинным, и достаточно удовлетворять первому условию. Вместо первого условия напишем такое: $(\mathrm{E}x)[p(x) \bar{G}_1(x)] \vee G_1(p)$. Если последняя формула доказуема, то доказуемо также первое из наших условий. Следовательно, $G(x)$, удовлетворяющее последней формуле, определяет противоречивый предикат. Выходя за рамки исчисления Ресселя, именно, вводя в рассмотрение формулы с бесконечным числом логических действий (которые можно, впрочем, изложить в виде обычного финитного формализма), можно дать полное описание всех формул $G(x)$, для которых $(\mathrm{E}x)[p(x) G(x)] \vee G(p)$ выводимо.

Формула эта напишется следующим образом:

$$p(x) \underset{\text{p.d.}}{\sim} (t_1)(t_2)\ldots(t_n)\ldots[\bar{x}(t) \vee \bar{t}_1(t_2) \vee \ldots \vee \bar{t}_n(t_{n+1}) \vee H(x) \vee \vee H_1(t_1)\ldots H_n(t_n)\ldots],$$

где $H(x), H_1(t_1), \ldots, H_n(t_n)$ — произвольные формулы. При частных значениях H и H_i мы получим также и финитные предикаты, удовлетворяющие условию, что $(\mathrm{E}x)[p(x) \bar{G}(x)] \vee G(p)$ выводимо. Такими будут, например, предикаты, указанные в статье Д. А. Бочвара ([2]):

$$p_n(x) \sim (t_1)\ldots(t_n)[\bar{x}(t_1) \vee \bar{t}_1(t_2) \vee \ldots \vee \bar{t}_{n-1}(t_n) \vee \bar{t}_n(t_n)].$$

Аналогичным образом из условий (1) и (2) можно получить другую серию противоречивых предикатов, которые оказываются дуальными первой серии

$$q_n(x) \sim (\mathrm{E}t_1)(\mathrm{E}t_2)\ldots(\mathrm{E}t_n)[\bar{x}(t_1)\, \bar{t}_1(t_2) \ldots \bar{t}_n(t_n)].$$

Поступило
21 XI 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Бочвар, Мат. сб., **15** (57): 3, 369 (1944). [2] Д. А. Бочвар, Мат. сб., **16** (58): 3, 345 (1945).