

Ф. Ф. ЮДАЛЕВИЧ

**К ВОПРОСУ О РОЛИ ВТОРИЧНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА
В ЯВЛЕНИИ СУМЕРЕК**

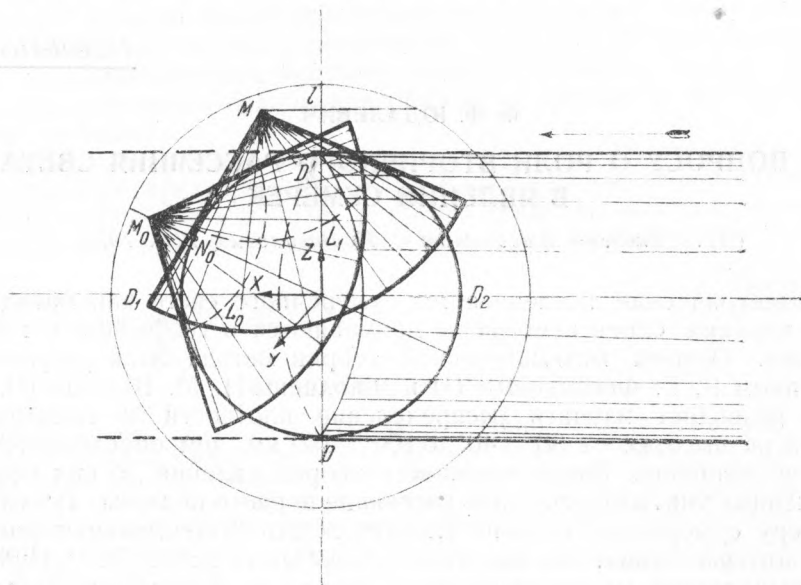
(Представлено академиком С. И. Вавиловым 12 X 1946)

Фотометрические исследования сумеречного света как метод изучения верхних слоев атмосферы применяются в геофизике в течение ряда лет. Основы математической теории метода были разработаны академиком В. Г. Фесенковым⁽¹⁾ и дополнены Н. М. Штауде⁽²⁾. Этот метод позволяет изучать распределение плотности и температуры воздуха на высотах от 30—40 до 100—150 км, чем определяется его большое значение. Ввиду сложности теории явления до сих пор при вычислениях учитывалось лишь рассеяние первого порядка. По самому характеру сумеречных явлений следует ждать существенного влияния вторичного рассеяния, что, в частности, показано в работе Е. О. Hulburt'a⁽³⁾, из вычислений которого следует, что из-за вторичного рассеяния применимость сумеречного метода ограничивается высотой всего лишь 65—75 км. Однако вычисления Е. О. Hulburt'a сделаны слишком упрощенно. Тем самым задача построения достаточно строгой теории сумеречных явлений с учетом вторичного рассеяния света приобретает большое значение — хотя бы потому, что необходимо теоретически разобраться в границах применимости сумеречного метода.

Именно такая задача была поставлена в лаборатории атмосферной оптики Института теоретической геофизики Академии наук СССР в 1944 г. Подобная задача является крайне трудной, поскольку, наряду со вторичным рассеянием, необходимо учитывать кривизну земли и атмосферы. Достаточно сказать, что в обширных работах по атмосферной оптике и теоретической астрофизике до сих пор всегда приходилось ограничиваться решением плоских задач, хотя в ряде случаев такое предположение явно не соответствует действительности. Особая сложность уравнений, к которым приводится указанная сумеречная задача, требует введения, во всяком случае на первом этапе работы, некоторых упрощенных предположений. В соответствии с этим эта задача пока нами рассматривается в предположении сферичности индикатрисы рассеяния света. При этом удалось найти путь, благодаря которому можно обойти встречающиеся в задаче вычислительные трудности и перейти в дальнейшем к задаче с несферической индикатрисой. Этот путь состоит в следующем.

Выберем прямоугольную систему координат так, как это показано на рисунке. Ось ординат направим перпендикулярно плоскости чертежа. Пусть направление солнечных лучей, указанное на чертеже стрелкой, совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Поверхность земли предполагаем сферической. Поверхность внешней границы атмосферы также предполагаем сферической и концентричной с земной сферой. Во всех дальнейших рассуждениях будем пренебре-

гать рефракцией света в земной атмосфере. Коническую поверхность, образованную земной тенью, и касательную к земной поверхности, мы можем с достаточной степенью точности считать цилиндрической поверхностью, как это сделано на рисунке. Обозначим через Ω_0 область земной тени. Возьмем внутри области Ω_0 произвольную точку M_0 и рассмотрим те области, из которых в точку M_0 приходит первично рассеянный свет. С этой целью построим конус, касательный



к земной поверхности и с вершиной в точке M_0 . Так как внутри области Ω_0 прямая радиация не попадает, то из нашего рассмотрения исключаются все точки, лежащие внутри области Ω_0 .

Введем обозначения: Q_0 — конус с вершиной в точке M_0 и касательный к земной поверхности, C_0 — цилиндр, касательный к земной поверхности, с образующей, параллельной направлению солнечных лучей, L_0 — окружность, по которой конус Q_0 касается земной сферы, N_0 — точка, в которой помещается глаз наблюдателя.

Вне области Ω_0 возьмем произвольную точку M , но таким образом, чтобы точка M не лежала внутри конуса Q_0 . Так как нас в первую очередь интересует интенсивность света в зените, то мы будем предполагать, что точка M_0 лежит на вертикали к точке N_0 . Заметим теперь, что во-первых, все точки M получают прямую радиацию; во-вторых, каждая из точек M_0 получает от каждой из точек M первично рассеянный свет. Построим теперь конус Q с вершиной в точке M и касательный к земной поверхности. Пусть L_1 — окружность, по которой конус Q касается земной сферы. Вообразим плоскость P , проходящую через диаметр DD' и перпендикулярную плоскости чертежа. Из геометрических соображений следует, что точка M получает первично рассеянный свет от всех точек, лежащих от плоскости P в сторону положительного направления оси X , но не внутри Ω_0 , и от всех точек, лежащих в сторону отрицательного направления оси X , но не внутри конуса Q .

Таким образом, глаз наблюдателя получает вторично рассеянный свет от множества точек M_0 и множества точек M . Можно легко показать, что описанный процесс — единственный, при помощи которого глаз наблюдателя в точке N_0 получает вторично рассеянный свет. Изложенный прием рассмотрения цилиндра и семейства конусов по-

зволяет выделить области, которые служат рассеянию третьего, четвертого и т. д. порядков.

Введем обозначения: $I_{0\lambda}$ — солнечная постоянная, k_λ — коэффициент экстинкции, x — абсцисса точки M , X — абсцисса точки пересечения прямой I (см. рисунок), параллельной оси абсцисс, с поверхностью земной атмосферы.

Обозначим через $\delta(h)$ плотность атмосферы на высоте h . Интенсивность первично рассеянного света из точки M будет равна:

$$\frac{1}{4\pi} I_{0\lambda} e^{-k_\lambda \int_x^X \delta(h) dx} \quad (1)$$

Из геометрических соображений получим для интенсивности вторично рассеянного света из точки M , либо из точки M_0 выражение вида:

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \iiint_{(v)} I_{0\lambda} e^{-k_\lambda \int_x^X \delta(h) dx} e^{-k_\lambda \int_0^r \delta(h) dr} r^{-2} d\tau \quad (2)$$

Область интегрирования (v) легко определяется из чертежа. При этом интегралы вида (2) придется разбить на две группы: к первой группе интегралов будут относиться те, которые дают выражение для интенсивности вторично рассеянного света из точек, принадлежащих к области Ω_0 , ко второй группе будут относиться интегралы, которые представляют выражение для интенсивности вторично рассеянного света из точки, принадлежащей к области, к которой относится множество точек M .

Для вычисления яркости, обусловленной вторично рассеянным светом в зените, нужно еще проинтегрировать выражение (2) от поверхности земли до верхних пределов атмосферы. Производить все описываемые операции обычными методами численного анализа является делом чрезвычайно сложным, как легко убедился автор, пробуя провести некоторые относящиеся сюда вычисления. Поэтому для вычисления интегралов, входящих в поставленную задачу, был применен прием, сущность которого состоит в следующем.

Проведем через центр земной сферы плоскость, перпендикулярную прямой $M_0 N_0$. Пусть эта плоскость пересечет поверхность земной сферы по большому кругу, который назовем L_2 . Разделим окружность L_2 на n равных частей и через точки деления и прямую $M_0 N_0$ проведем плоскости. Таким образом объем, заключенный между поверхностью земного шара и поверхностью земной атмосферы, окажется разбитым на n „ломтей“. С увеличением числа делений n , т. е. с уменьшением „толщины“ каждого отдельного „ломтя“, значение интенсивности первично рассеянного света, получаемого точкой M_0 от всех точек какого-либо одного „ломтя“, приближается, как к пределу, к значению интенсивности первично рассеянного света, получаемого точкой M_0 от всех точек плоскости, проходящих через ребро $M_0 N_0$ „ломтя“ и делящей его на две части. Произведя вычисления для каждого отдельного „ломтя“ и суммируя результаты, получим значение интенсивности первично рассеянного света, пришедшего в точку M_0 от всех других точек области (v) .

Обстоятельство, на которое мы сейчас укажем, весьма упрощает вычисления, ведущиеся по этому методу. Предположим, что мы рассчитали интенсивность первично рассеянного света для каждой точки плоскости чертежа. Если координаты точки x, z , то обозначим эту интенсивность I_{xz} . Обозначим через $I_{xyz}^{(k)}$ соответствующее значение ин-

тенсивности для k -го „ломтя“. Рассматривая пересечение одного какого-либо „ломтя“ с семейством плоскостей, проходящих через диаметр D_1D_2 , можно усмотреть, что все значения $I_{xyz}^{(k)}$ для любого, k -го „ломтя“ уже находятся в таблице I_{xz} , и таблица $I_{xyz}^{(k)}$ отличается от таблицы I_{xz} только распределением элементов, но не их численными значениями. Следующая теорема, справедливая для сферической индикатрисы, помогает обойти вычислительные трудности.

Теорема. Положим, что таблица значений I_{xz} построена для различных значений зенитных расстояний солнца. Тогда задача об интенсивности первично рассеянного света, полученного в точке M_0 от всего множества точек любого, k -го „ломтя“, может быть решена с любой степенью точности только операциями сложения и умножения, примененными к значениям величин, содержащихся в таблице I_{xz} .

Следствие. При выполнении начальных условий формулированной теоремы задача об интенсивности первично рассеянного света, полученного в точке M_0 от всего множества точек области (v) , может быть решена с любой степенью точности только операциями сложения и умножения, примененными к значениям величин, содержащихся в таблице I_{xz} .

Если обозначить через i_k интенсивность первично рассеянного света, получаемого в точке M_0 от освещенного слоя k -го „ломтя“, а суммарную интенсивность в точке M_0 через $i_{M_0} = \sum_{k=1}^n i_k$, то из геометрических соображений можно усмотреть, что

$$i_k < i_{k-1} \quad (3)$$

(индекс $k=1$ соответствует плоскости чертежа). Это условие имеет существенное значение для оценки рассеяний первого порядка, поступающих в точку M_0 по различным направлениям. Следует заметить, что последовательность значений i_k достаточно быстро убывает, и тем быстрее, чем больше зенитное расстояние солнца, т. е. чем ниже солнце опустилось под горизонт.

Изложенный метод позволяет сравнительно просто выполнить числовые расчеты и получить с большой точностью количественную оценку доли вторичного рассеяния в общей яркости неба в различные моменты сумерек. В связи с тем, что большая часть измерений проводится в зените, все наши вычисления выполняются также для зенита. Вычисления для случая сферической индикатрисы заканчиваются. Кроме того, разрабатываемый метод позволяет перейти к несферической индикатрисе, если известно решение задачи для индикатрисы сферической.

Тема работы была предложена мне проф. И. А. Хвостиковым, которому я приношу глубокую благодарность как за предоставление темы, так и за ряд весьма ценных указаний, касающихся существа физического смысла задачи, которые определили направление разрабатываемой темы.

Лаборатория атмосферной оптики
Института теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
12 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Фесенков, Тр. Астрофиз. обсерв., 2 (1923); Астрон. журн., 7, № 2 (1930).
² Н. М. Штауде, Фотометрические наблюдения сумерек как метод изучения верхней стратосферы, 1936. ³ E. O. Hulburt, J. Optical Soc. Am. 28, No. 7 (1938).