Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 8

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 12 IX 1946)

§ 1. Предположим, что рассматриваемая упругая среда заполняет конечную двусвязную область S, расположенную в плоскости $z=x+iy$ и ограниченную контуром L, состоящим из двух не имеющих общих точек простых замкнутых кривых L_1 и L_2. Допустим, что кривая L_1 содержит внутри себя L_2, и будем считать обход первой из них совершающимся против движения часовой стрелки, а второй — по направлению движения часовой стрелки. Далее, обозначим через S_1 и S_2 односвязные области, ограниченные соответственно кривыми L_1 и L_2; очевидно, из них область S_1 является бесконечной.

Как известно ([1]), задача определения напряжений в упругой среде S в том случае, когда на ограничивающем ее контуре L известны действующие внешние силы, сводится к отысканию регулярных в S функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, удовлетворяющих на L условию

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t), \tag{1}$$

где t — аффикс точки границы и $f(t)$ — заданная на ней функция. Для удобства условимся значения $f(t)$ на кривых L_1 и L_2 обозначать, соответственно, через $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Взяв искомые функции в форме специально подобранных потенциалов ([2]), имеющих вид некоторых распространенных по контуру L интегралов с неизвестной плотностью, мы получим для определения последней интегральное уравнение Фредгольма. Однако необходимость рассматривать это уравнение на всем контуре L (а не на какой-либо одной из составляющих кривых L_1 или L_2) вносит, вообще говоря, усложнение при его приближенном решении.

В настоящей статье мы укажем прием, позволяющий задачу теории упругости для двусвязной области последовательно свести сначала к аналогичной же задаче для односвязной области и затем к уравнению Фредгольма для некоторой вспомогательной функции, вводимой (по усмотрению) лишь на одной из кривых L_1 или L_2. В некоторых частных случаях, представляющих интерес, последнее уравнение оказывается более удобным, нежели уравнение для плотности в упомянутых потенциалах.

Для этого поступим следующим образом. Введем в рассмотрение, наряду с $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, также неизвестные функции $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$, регулярные в области S_2, и функцию $g(t)$, непрерывно дифференцируемую на кривой L_2, удовлетворяющие на L_2 соотношениям:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}+2g(t), \tag{2}$$

$$\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}-2Ct=\varphi_2(t)-t\overline{\varphi_2'(t)}-\overline{\psi_2(t)}, \tag{3}$$

где C — вещественная постоянная, равная функционалу

$$C = \frac{1}{4S_2} \operatorname{Im} \int_{L_2} \psi(t)\, dt, \tag{4}$$

причем Im обозначает мнимую часть выражения и S_2 — площадь области того же наименования.

Нетрудно видеть, что новая задача, заключающаяся в определении $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ и $g(t)$ из соотношений (1), (2) и (3), всегда разрешима. Действительно, предполагая, что выполняется равенство

$$\operatorname{Re} \int_L f(t)\, \overline{dt} = 0 \tag{5}$$

(где Re — символ вещественной части), выражающее обращение в нуль главного момента приложенных к L внешних сил, найдем сначала из условий (1) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$; затем, подставив их значения в (3), определим $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$. После этого из формулы (2) найдем $g(t)$.

С другой стороны, к решению той же задачи можно притти иным образом.

Сложив и вычтя друг из друга равенства (2) и (3) и принимая во внимание свойства интегралов типа Коши, будем иметь (при указанном обходе кривой L_2):

$$\varphi(t_0) - \lim_{z \to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t - z}\, dt = \\ = \varphi_2(t_0) - \lim_{z \to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t - z}\, dt + Ct_0, \tag{6}$$

$$\psi(t_0) - \lim_{z \to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{g(t)} - \overline{t}\, g'(t) - 2C\overline{t}}{t - z}\, dt = \\ = \psi_2(t_0) - \lim_{z \to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{g(t)} - \overline{t}\, g'(t) - 2C\overline{t}}{t - z}\, dt, \tag{7}$$

где t_0 — аффикс точки L_2, причем в левых частях этих равенств точка z стремится к t_0 изнутри области S, а в правых частях — изнутри области S_2.

Далее, введем в области S регулярные функции

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{g(t)}{t - z}\, dt, \tag{8}$$

$$\psi^*(z) = \psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{g(t)} - \overline{t}\, g'(t) - 2C\overline{t}}{t - z}\, dt. \tag{9}$$

В силу равенств (6) и (7) заключаем, что они могут быть аналитически продолжены в область S_2 и, следовательно, являются регулярными во всей односвязной области $S + S_2$, ограниченной кривой L_1.

Подставив теперь в равенство (1) на кривой L_1 вместо функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ их выражения через $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$, получим после легких преобразований

$$\varphi^*(t) + t\overline{\varphi^{*\prime}(t)} + \overline{\psi^*(t)} = f_1(t) + N(g, \overline{g}, t), \tag{10}$$

где оператор

$$N(g, \bar{g}, t_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} g(t)\, d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\overline{g(t)}\, d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{Ct}{t-t_0}\,\overline{dt}.$$

Из условия (2), записанного в форме

$$f_2(t) = \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} + 2g(t), \tag{11}$$

найдем

$$\operatorname{Re}\int\limits_{L_2} f_2(t)\,\overline{dt} = \int\limits_{L_2}\left\{g(t)\,\overline{dt} + \overline{g(t)}\,dt\right\}. \tag{12}$$

Отсюда, учитывая (5), получим:

$$\int\limits_{L_1}\left\{f_1(t) + N(g, \bar{g}, t)\right\} dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{L_1}\overline{dt_1}\int\limits_{L_2}\frac{g(t)}{t-t_1}\,dt + \int\limits_{L_1} dt_1\int\limits_{L_2}\frac{\overline{g(t)\ dt}}{\bar{t}-\bar{t}_1}\right\} - 4iCS_2. \tag{13}$$

Правая часть последнего равенства есть величина чисто мнимая; поэтому функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ могут быть определены в области $S + S_2$ из условия (10) при любом значении $g(t)$, удовлетворяющем (12). Тогда будем иметь:

$$\varphi^*(z) = F(z) + G_1(g, \bar{g}, z), \quad \psi^*(z) = T(z) + G_2(g, \bar{g}, z), \tag{14}$$

где $F(z)$ и $T(z)$ — функции (с допустимой степенью произвола), содержащие неизвестную постоянную C, а G_1 и G_2 — некоторые операторы, зависящие лишь от $g(t)$ и $\bar{g}(t)$.

Наконец, подставив в равенство (11) вместо $\varphi_2(t)$ и $\psi_2(t)$ их выражения через $\varphi^*(t)$ и $\psi^*(t)$ согласно (6)—(9) и (14), получим для определения $g(t)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$g(t) + \Omega(g, \bar{g}, t) = Q(t), \tag{15}$$

где Ω — некоторый оператор, а $Q(t)$ — свободный член, зависящий от C. Определив последнюю из условий разрешимости этого уравнения, найдем затем $g(t)$ и, по формулам (8) и (9), — искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Отметим, что в том случае, когда кривая L_1 является окружностью, ядро уравнения (15) выражается через элементарные функции.

П р и м е ч а н и е. Изложенный прием можно несколько видоизменить. Именно, вместо $\varphi_2(z)$ и $\psi_2(z)$ введем функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, регулярные в S_1 и обращающиеся в нуль на бесконечности из условий на L_1:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} + 2g(t),$$

$$\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = \varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1'(t)}. \tag{16}$$

Тогда, полагая в области S

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\psi^*(z) = \psi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{g(t)} - \bar{t}\,g'(t)}{t-z}\,dt, \tag{17}$$

убедимся из соображений, аналогичных приведенным выше, что функции $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ будут регулярны в бесконечной области $S+S_1$, ограниченной кривой L_2. В остальном поступаем, как прежде.

Очевидно, ядро уравнения Фредгольма, которое мы здесь получим для $g(t)$, в частном случае, когда кривая L_2 является окружностью или эллипсом, также выражается в элементарных функциях.

§ 2. Этот же метод может быть использован при решении неоднородной задачи теории упругости. Пусть, например, две сопряженные между собою среды с различными упругими свойствами заполняют, соответственно, области S и S_2. Тогда, если известны внешние силы, действующие на кривой L_1, задача сводится к отысканию функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$, из которых две первые регулярны в S, а остальные — в S_2, удовлетворяющих предельным условиям:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1(t) \text{ на } L_1, \tag{18}$$

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\psi_2(t),$$
$$-\frac{\varkappa}{\mu}\varphi(t)+\frac{1}{\mu}\left\{t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right\}=$$
$$=-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\varphi_2(t)+\frac{1}{\mu_2}\left\{t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}\right\}+f_2(t) \text{ на } L_2, \tag{19}$$

где $\varkappa$, μ, $\varkappa_2$ и μ_2 — упругие постоянные и $f_1(t), f_2(t)$ — заданные функции. Для простоты допустим, что кривые L_1 и L_2 являются окружностями *. В этом случае будем иметь практически важную задачу о посадке эксцентрика на вал (путем нагрева или запрессовки).

Введя в S_1 функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ из условий (16) и выразив в равенствах (19) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ через $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ на оснований (17), получим на L_2:

$$\varphi^*(t)+t\overline{\varphi^{*\prime}(t)}+\overline{\psi^*(t)}=\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}+N_1(g,\overline{g},t),$$
$$-\frac{\varkappa}{\mu}\varphi^*(t)+\frac{1}{\mu}\left\{t\overline{\varphi^{*\prime}(t)}+\overline{\psi^*(t)}\right\}= \tag{20}$$
$$=-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\varphi_2(t)+\frac{1}{\mu_2}\left\{t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}\right\}+N_2(g,\overline{g},t)+f_2(t),$$

где N_1 и N_2 — некоторые операторы.

Определив из этих соотношений $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ (при произвольном $g(t)$) и возвращаясь к равенству (18), получим для $g(t)$ уравнение Фредгольма.

Между тем, если следовать общему методу, предложенному нами ранее [2], мы сведем рассматриваемую задачу к системе интегральных уравнений с тремя неизвестными функциями, из которых одна должна быть определена на кривой L_1, а две остальные — на кривой L_2.

Примечание. В заключение отметим, что прием, указанный в данной статье, может быть в некоторых частных случаях использован также при решении одной из основных задач теории упругости для конечной односвязной области, если внешняя к последней бесконечная область отображается с помощью достаточно простой рациональной функции на внешность круга.

Поступило
12 IX 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935; Н. И. Мусхелишвили, Некоторые задачи теории упругости, 1935. [2] Д. И. Шерман, ДАН, 28, № 1 (1940). [3] Д. И. Шерман, Прикладн. математ. и мех. 7 (1943).

* Рассуждения остаются справедливыми для любых кривых L_1 и L_2.