Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 4

ГЕОФИЗИКА

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И ПОКРЫВАЮЩЕМ ЕГО СЛОЕ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 22 X 1946)

1. В заметке ([1]) я рассмотрел некоторые частные решения задачи о плоско-параллельных малых колебаниях упругой системы, состоящей из упругого полупространства и покрывающего его слоя сжимаемой жидкости. Характерной особенностью исследованных типов плоских волн является наличие одной (поперечной) или двух (продольной и поперечной) вещественных волн в полупространстве, которые могут быть произвольно заданы. В настоящей заметке изучаются те частные решения, при которых волны в полупространстве — комплексные и, стало быть, имеют поверхностный характер. Постановка задачи, граничные условия, обозначения и выбор координатной системы те же, что в работе ([1]). Попрежнему мы ограничиваемся неравенством

$$a_2 > b_2 > a_1.$$

2. Если обратимся к рассмотрению плоских волн, описываемых потенциалом скоростей $\varphi_1(\tau, y)$ в жидком слое и потенциалами продольным $\varphi_2(\tau, y)$ и поперечным $\psi_2(\tau, y)$ в твердой упругой среде, то дифференциальные уравнения плоских волн будут:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{a_1^2} - \theta^2\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2} = 0 \qquad (-H < y < 0), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{a_2^2} - \theta^2\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} - \left(\frac{1}{b_2^2} - \theta^2\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2} = 0 \qquad (y > 0). \tag{2}$$

Пусть теперь $1/b_2 < \theta < 1/a_1$. В этом случае уравнения (2) суть уравнения эллиптического типа, и общее решение системы имеет форму:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau, y) &= f_1(\tau + \varkappa_1 y) + \bar{f}_1(\tau - \varkappa_1 y), \\ \varphi_2(\tau, y) &= f_2(\tau + i\varkappa_2 y) + \overline{f_2}(\tau - i\varkappa_2 y), \\ \psi_2(\tau, y) &= g_2(\tau + i\lambda_2 y) + \overline{g_2}(\tau - i\lambda_2 y). \end{aligned} \tag{3}$$

Черта над знаком функции означает сопряженную операцию,

$$\varkappa_1 = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta^2}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{\theta^2 - \frac{1}{a_2^2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\theta^2 - \frac{1}{b_2^2}}.$$

Граничные условия задачи налагают такие соотношения на искомые функции:

$$f_1(\tau + h) + \breve{f}_1(\tau) = 0,$$

$$\varkappa_1 [f_1'(\tau) - \breve{f}_1'(\tau)] = i\varkappa_2 [f_2''(\tau) - \bar{f}_2''(\tau)] - \theta [g_2''(\tau) + \bar{g}_2''(\tau)],$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} [f_1'(\tau) + \breve{f}_1'(\tau)] = (1 - 2b_2^2\theta^2) [f_2''(\tau) + \bar{f}_2''(\tau)] - 2b_2^2\theta i\lambda_2 [g_2''(\tau) - \bar{g}_2''(\tau)], \quad (4)$$

$$2i\varkappa_2\theta b_2^2 [f_2''(\tau) - \bar{f}_2''(\tau)] + (1 - 2b_2^2\theta^2) [g_2''(\tau) + \bar{g}_2''(\tau)] = 0.$$

Будем требовать, чтобы функции f_1 и $\breve{f}_1$ были ограниченными, а функции $f_2(\tau + i\varkappa_2 y)$ и $g_2(\tau + i\lambda_2 y)$ — аналитическими в полуплоскости $y > 0$, обладали ограниченными производными и, кроме того, чтобы имели место предельные равенства:

$$\lim_{L \to \infty} \int \frac{f_2(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta} = 0, \qquad \lim_{L \to \infty} \int \frac{g_2'(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}, \quad (5)$$

где L — радиус полукруга с центром в начале, расположенного в полуплоскости $y > 0$. По окружности этого полукруга берутся интегралы.

При этих условиях можно показать, что из системы (4) следует функциональное уравнение

$$m f_2(z + h) + f_2(z) = \mathrm{const} \qquad (y > 0), \quad (6)$$

где

$$z = \tau + i\varkappa_2 y, \qquad m = \frac{R + ir}{R - ir}.$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$f_2(z) = \Phi(z)\, e^{-i\beta z} + \mathrm{const}, \quad (6')$$

где $\beta = \arg(-m)/h$, а $\Phi(z)$ есть произвольная периодическая функция с периодом h. Если положить для сокращения

$$\Phi^*(z) = \Phi'(z) + i\beta\Phi(z),$$

$$\Phi(z) = \Phi_1(\tau, y) + i\Phi_2(\tau, y),$$

то окончательный результат решения задачи можно записать в форме:

$$\varphi_1(\tau, y) = \frac{\rho_2}{\rho_1(1 - b_2^2\theta^2)} \mathrm{Re} \left\{ (R + ir)\, \Phi^*(\tau + \varkappa_1 y)\, e^{-i\beta(\tau + \varkappa_1 y)} + \right.$$

$$\left. + (R - ir)\, \Phi^*(\tau + \varkappa_1 y)\, e^{-i\beta(\tau - \varkappa_1 y)} \right\},$$

$$\varphi_2(\tau, y) = 2e^{\beta\varkappa_2 y} \left\{ \Phi_1(\tau, y) \cos\beta\tau + \Phi_2(\tau, y) \sin\beta\tau \right\}, \quad (7)$$

$$\psi_2(\tau, y) = \frac{4b_2^2\theta\varkappa_2}{1 - 2b_2^2\theta^2} e^{\beta\lambda_2 y} \left\{ \Phi_1(\tau, y) \cos\beta\tau - \Phi_2(\tau, y) \sin\beta\tau \right\}.$$

Символом $\Phi^*(\tau + \varkappa_1 y)$ обозначено предельное значение функции, когда z стремится к вещественному значению $\tau \pm \varkappa_1 y$. Можно показать, что при условии ограниченности $\Phi(z)$ в полуплоскости $y > 0$ и соответствующем выборе значения $\beta = \arg(-m)/h$, найденная система функций удовлетворяет уравнениям (1) и (2), а также граничным условиям и условиям (5). Формулы (7) обнаруживают, что затухание поверхностной волны с глубиной мажорируется экспоненциальным законом. Произвольным остается выбор аналитической функции в полуполосе ($y>0$, $0<\tau<h$). Характер произвола при этом такой же, как в случае свободных колебаний, когда каждая собственная функция определена с точностью до постоянного множителя.

3. Рассмотрим последний случай, при котором $\theta > 1/a_1$. Дифференциальные уравнения плоских волн (1) и (2) имеют общие решения

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau, y) &= f_1(\tau + i\varkappa_1 y) + \overline{f}_1(\tau - i\varkappa_1 y),\\ \varphi_2(\tau, y) &= f_2(\tau + i\varkappa_2 y) + \overline{f}_2(\tau - i\varkappa_2 y),\\ \psi_2(\tau, y) &= g_2(\tau + i\lambda_2 y) + \overline{g}_2(\tau - i\lambda_2 y).\end{aligned} \tag{8}$$

Граничные условия задачи дают:

$$f_1(\tau + ih) + \overline{f}_1(\tau) = 0,$$

$$i\varkappa_1\left[f_1'(\tau) - \overline{f}_1'(\tau)\right] = i\varkappa_2\left[f_2''(\tau) - \overline{f}_2''(\tau)\right] - \theta\left[g_2''(\tau) - \overline{g}_2''(\tau)\right],$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[f_1(\tau) - \overline{f}_1(\tau)\right] = (1 - 2b_2^2\theta^2)\left[f_2''(\tau) + \overline{f}_2''(\tau)\right] - 2ib_2^2\theta\lambda_2\left[g_2''(\tau) - \overline{g}_2''(\tau)\right],$$

$$2ib_2^2\theta\varkappa_2\left[f_2''(\tau) - \overline{f}_2''(\tau)\right] + (1 - b_2^2\theta^2)\left[g_2''(\tau) + \overline{g}_2''(\tau)\right] = 0.$$

Функция $f_1(\tau + i\varkappa_1 y)$ должна быть аналитической функцией переменного $\tau + i\varkappa_1 y$, ограниченной в полосе ($-H \leqslant y < 0$, $-\infty < \tau < +\infty$). Условия для функций f_2 и g_2 те же, что в предыдущем случае. При перечисленных условиях можно показать, что найдутся две функции $F_1(\tau + i\varkappa_1 y)$ и $F_2(\tau + i\varkappa_1 y)$ аналитические, первая — при $y < 0$, а вторая — при $y > -H$ и такие, что $f_1(\tau + i\varkappa_1 y) = F_1(\tau + i\varkappa_1 y) + F_2(\tau + i\varkappa_1 y)$. Как следствие граничных условий затем получается, что внутри полосы ($H < y < 0$, $-\infty < \tau < +\infty$) имеют место равенства

$$i\varkappa_1\left[\overline{F}_1(z_1) + F_2(z_1)\right] = -i\varkappa_2 f_2'(z_1) - \theta g_2'(z_1) + \text{const},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\overline{F}_1(z_1) - F_2(z_1)\right] = (1 - 2b_2^2\theta^2) f_2'(z_1) + 2ib_2^2\theta\lambda_2 g_2'(z_1) + \text{const},$$

$$2ib_2^2\theta\varkappa_2 f_2(z_1) + (1 - 2b_2^2\theta^2)\, g_2'(z_1) = \text{const},$$

где $z_1 = \tau + i\varkappa_1 y$.

При $y > -H$ имеем

$$-F_2(z_1) + \overline{F}_1(z_1 - ih) = \text{const}.$$

Исключение $\overline{F}_1$, F_2, g_2 приводит к функциональному уравнению

$$mf_2(z_1 - ih) + f_2(z_1) = C_1 z_1 + C_0, \tag{9}$$

где $m = \dfrac{R - r}{R + r}$, а z_1 имеет положительную мнимую часть.

Общее решение этого уравнения с точностью до несущественной линейной аддитивной функции:

$$f_2(z_1) = \Phi(z_1)\, e^{-\frac{i \ln(-m)}{h} z_1}, \tag{10}$$

где $\Phi(z_1)$ — произвольная периодическая функция с периодом ih. Для ограниченности в нижней полуплоскости необходимо неравенство $|m|>1$. Если $m<0$, то можно показать, что требование ограниченности приводит к равенству

$$\Phi(z_1)=C \text{ (постоянному)},$$

так что

$$f_2(z_1)=Ce^{-\frac{i\ln|m|}{h}z_1}. \tag{10'}$$

При $m>0$ оказывается, что $f_2(z_1)\equiv 0$. Окончательному результату можно придать вид:

$$\varphi_1(\tau, y)=-\frac{C\rho_2(R+r)}{\rho_1(1-2b_2^2\theta^2)}e^{\gamma\varkappa_1 H}\sin h\gamma\varkappa_1(y+H)\cos\gamma\tau,$$

$$\varphi_2(\tau, y)=Ce^{-\gamma\varkappa_2 y}\sin\gamma\tau, \tag{11}$$

$$\psi_2(\tau, y)=-\frac{2Cb_2^2\theta\varkappa_2}{1-2b_2^2\theta^2}e^{-\gamma\lambda_1 y}\cos\gamma\tau,$$

$$\gamma=-\frac{\ln|m|}{h}.$$

Решения вида (11) можно было бы получить методом Фурье; однако тогда остался бы открытым вопрос о том, исчерпаны ли этими выражениями все решения. Этот вопрос при указанных ограничениях получил здесь положительный ответ.

Относительно множества тех значений θ, при которых существуют поверхностные волны (спектральные значения θ), можно сделать следующие выводы. Обозначим скорость поверхностных волн в одном полупространстве через c_2 (релеевская скорость). Тогда при $1/c_2<1/a_1$ существует один сплошной интервал, заполненный спектральными значениями θ. Левым концом его служила точка $1/a_2$, а правым — некоторое значение $\theta_0>1/a_1$. Значение θ_0 зависит от констант, характеризующих среду; в частности, θ_0 уменьшается вместе с уменьшением плотности жидкости. При $1/c_2>1/a_1$ область спектральных значений θ распадается на два изолированных интервала; один из них — интервал $(1/a_2,\ 1/b_2)$, другой $(1/c_2,\ \theta_0)$, где θ_0 зависит попрежнему от констант среды и находится в той же, указанной выше, зависимости от плотности жидкости.

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
22 X 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Зволинский, ДАН, 56, № 1 (1947).