Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 7

МАТЕМАТИКА

А. Г. МАЙЕР

О ТРАЕКТОРИЯХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 VIII 1946)

1. В 1941 г. Биркгоф (1) поставил задачу: показать на примере, что в пространстве* R_n размерности $n \geqslant 3$ может быть „непрерывный поток", для которого последовательность блуждающих движений, приводящая к центральным движениям, содержит больше чем n членов.

Утверждается: каков бы ни был трансфинит первого класса β, евклидово пространство E_3 можно разбить на систему траекторий с непрерывно вращающимися касательными, для которой порядковое число центральных движений не меньше β. Ниже дается краткое изложение схемы построения.

2. Назовем кривую C „допустимой", если C есть простая замкнутая кривая в E_3 (x_1, x_2, x_3), для которой функции dx_i/ds, $i=1, 2, 3$, s — длина дуги C, удовлетворяют условию Липшица на замкнутом множестве точек C.

Легко видеть, что по отношению к каждой допустимой кривой C можно построить „тороидальные координаты" φ, ρ, ψ (где „долгота" φ пропорциональна длине дуги C), так что при достаточно малом r касательные семейства линий $\rho = \text{const} \leqslant r$, $\psi = \text{const}$ удовлетворяют условиям Липшица. Множество точек $0 \leqslant \rho \leqslant r$ будем называть тором, линии $\rho = \text{const} \leqslant r$, $\psi = \text{const}$ — параллелями тора, плоскости $\varphi = \text{const}$ — меридианными плоскостями.

Пусть в торе T определено семейство кривых (L), удовлетворяющее условиям:

1) через каждую точку T проходит одна и только одна кривая;

2) каждая кривая или состоит из одной лишь точки (тогда будем называть ее состоянием равновесия) или имеет непрерывно вращающуюся касательную;

3) направляющие косинусы касательной являются непрерывными функциями точки.

Мы назовем кривые (L) траекториями, если для них выполнены условия 1) — 3) и, кроме того, можно ввести параметрическое представление кривых так, что будет выполнена

4) теорема о непрерывной зависимости от начальных условий.

Наконец, мы назовем разбиение тора T траекториями (L) допустимым, если:

5) линии $\rho = r$, $\psi = \text{const}$. состоит из целых траекторий;

6) все состояния равновесия лежат в некоторой меридианной плоскости;

7) множество центральных движений состоит из состояний равновесия.

---

* Под пространством Биркгоф здесь понимает метрическое компактное пространство.

Теорема. 1) *Если существует допустимое разбиение тора T_0 на траектории, приводящее к центральным движениям в α шагов, то существует и допустимое разбиение тора T на траектории, приводящее к центральным движениям не менее чем в $\alpha+1$ шаг.*

2) *Если существуют допустимые разбиения торов T_1^*, T_2^*, ... на траектории, приводящие к центральным движениям в α_1, α_2, ... шагов, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$, и если β есть порядковое число, непосредственно следующее за $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, то существует и допустимое разбиение тора T на траектории, приводящее к центральным движениям не менее чем в β шагов.*

Доказательство. Пусть T — тор радиуса R, имеющий окружность C своей средней линией. Пусть σ — спираль, лежащая в торе T и навивающаяся на C в обе стороны и притом так, что угловые коэффициенты касательных к σ и C удовлетворяют условию Липшица с некоторой постоянной K и приближение σ к C совершается при монотонном изменении φ, ρ и ψ.

Возьмем на C точку P_0 и возьмем $\varepsilon_1 > 0$. Построим допустимую кривую C_1, лежащую в ε_1-окрестности σ и содержащую σ в своей ε_1-окрестности, не пересекающую ни σ, ни C и такую, чтобы при достаточно малом R_1 параллели, лежащие на поверхности тора T_1 (со средней линией C_1 и радиуса R_1), спираль σ и окружность C имели направляющие косинусы касательных, удовлетворяющие условию Липшица; при этом постоянная условия Липшица вне ε_1-окрестности P_0 не должна превосходить $\frac{5}{4}K$, а значение ее в ε_1-окрестности P_0 обозначим через K_1.

Построение можно продолжать неограниченно. Именно, пусть построены торы $T_1, T_2, \ldots, T_n$, апроксимирующие σ так, что: а) средняя линия C_k тора T_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ есть допустимая кривая, лежащая в ε_k-окрестности σ и содержащая σ в своей ε_k-окрестности $(\varepsilon_1 > \varepsilon_1 > \ldots \to 0)$; б) угловые коэффициенты касательных к параллелям, лежащим на поверхности торов $T_1, \ldots, T_n$, к спирали σ и окружности C удовлетворяют условию Липшица с постоянной, не превосходящей: $\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]K$ вне ε_1-окрестности P_0; $\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]K_1$ в точках ε_1-окрестности P_0, лежащих вне ε_2-окрестности P_0; ...; $\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]K_{n-1}$ в точках ε_{n-1}-окрестности P_0, лежащих вне ε_n-окрестности P_0, и, наконец, K_n внутри ε_n-окрестности P_0.

Возьмем ε_{n+1} столь малым, чтобы в ε_{n+1}-окрестности σ не лежало ни одной точки $T, T_1, \ldots, T_n$; всегда можно построить допустимую кривую C_{n+1} и тор T_{n+1} так, чтобы для $T_1, \ldots, T_{n+1}$ выполнялись условия а) и б). При этих построениях нетрудно также соблюсти условие: каждая кривая C_k пересекает под прямым углом меридианную плоскость K тора T, проведенную в точке P_0 в ε_k-окрестности P_0.

Получив указанным способом счетную последовательность торов $T_1, T_2, \ldots$, построим допустимое разбиение тора T на траектории следующим образом.

Запишем уравнения кривых C, σ и параллелей на поверхностях торов $T, T_1, T_2, \ldots$ в параметрическом виде, взяв за параметр s длину дуги C; производные $x_i'(s)$, $i = 1, 2, 3$, в точках замкнутого множества $C+\sigma+T+T_1+\ldots$ будут удовлетворять условию Липшица с некоторой постоянной K' вне ε_1-окрестности P_0; с постоянной K'' в ε_1-, но вне ε_2-окрестности P_0; ...; с постоянной $K^{(n)}$ в ε_{n-1}-, но вне ε_n-окрестности P_0 и т. д.

Применяя лемму § 4 заметки (²), доопределим функции $x_i'(s)$, $i = 1, 2, 3$, последовательно: 1) в T вне ε_1-окрестности P_0; 2) в ε_1-, но вне ε_2-окрестности P_0 и т. д.

В каждом торе T_k выполним допустимое разбиение на траектории, удовлетворяющее условиям теоремы в торе T_0, расположив состояния равновесия в K в ε_k-окрестности P_0. Остается сделать допустимым разбиение всего тора T на траектории.

Обозначим точки пересечения K с σ через $Q_i, -\infty < i < \infty$. Построим вокруг Q_0 окрестность γ_0 столь малого радиуса, что в γ_0 не попадает ни одна из точек Q_i, $i \neq 0$; вокруг каждой точки Q_m окрестность γ_m столь малого радиуса, чтобы каждая траектория, проходящая через γ_m, пересекала K в точках γ_0 и чтобы в γ_m не попадали точки, принадлежащие γ_i, $|i| < |m|$, или γ_{-m}.

Обозначим через F замкнутое множество точек, получаемых удалением из K точек, внутренних какому-либо из торов T_n, $n = 1, 2, \ldots$, или какой-либо из окрестностей γ_m, $m \neq 0$.

Построим функцию f, равную нулю в точках F и положительную в остальных точках T.

Тогда система траекторий, получающаяся из построенной ранее заменой параметра s на параметр t так, что $ds = f dt$, и будет искомой. Легко видеть, в самом деле, что она будет удовлетворять всем условиям теоремы*.

Заметим, что для случая 2) построение чрезвычайно упрощается, ибо достаточно воспользоваться последовательностью торов T_k, приближающихся к окружности C (без спирали σ).

Следствие. Каков бы ни был трансфинит 1-го класса β, всегда можно указать такое заполнение E_3 траекториями, удовлетворяющими условиям 1) — 4), при котором множество центральных движений имеет порядковое число не меньше β.

Поступило
18 VIII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. D. Birkhoff, Science, **94**, 598, problem 12 (1941). [2] **А. Г. Майер**, ДАН, **55**, № 6 (1947).

* Заметим, что условия Липшица для правых частей соответствующей системы дифференциальных уравнений не будут соблюдены в окрестности точек σ из-за траекторий, лежащих внутри T_k; однако правые части всюду сохранят непрерывность, в том числе и в окрестности точки P_0, при подходящем выборе функции f.