Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 6

МАТЕМАТИКА

Академик И. М. ВИНОГРАДОВ

НЕКОТОРЫЙ ОБЩИЙ ЗАКОН ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Еще в 1937 г. мною был найден элементарный метод вывода одного общего закона распределения дробных частей значений функции $f(p)$ при условии, что p пробегает простые числа некоторого интервала $P_1 < p \leqslant P_2$. Этот закон состоит в том, что при некоторых весьма общих предположениях, касающихся вида функции $f(p)$ и интервала $P_1 < p \leqslant P_2$, указанные дробные части будут распределены приблизительно равномерно. Именно, если $\{f(p)\}$ обозначает дробную часть от $f(p)$, то, каково бы ни было σ с условием $0 < \sigma \leqslant 1$, число T_σ простых чисел интервала $P_1 < p \leqslant P_2$ с условием $0 \leqslant \{f(p)\} < \sigma$ приблизительно равно произведению σ на число T всех простых чисел указанного интервала; точнее,

$$T_\sigma = \sigma T + \Delta_\sigma,$$

где Δ_σ мало по сравнению с T. Впоследствии мой метод подвергся дальнейшим переработкам, позволившим получить результаты еще более совершенные, как в отношении области применения, так и в отношении точности оценки погрешности Δ_σ. Для весьма важного случая, когда $f(p)$ — целый многочлен: $f(p) = a_n p^n + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p$, такие более совершенные результаты мною уже опубликованы (1); в настоящем сообщении я рассматриваю другой не менее важный случай, когда $f(p)$ хотя и не является целым многочленом, но в известном смысле хорошо апроксимируется таким многочленом.

Доказательство опирается на следующую теорему, которая важна и сама по себе:

Теорема 1. a) *Пусть* $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *— положительные постоянные,* n *— целое,* $14 \leqslant n \leqslant c_0$; P *— целое превосходящее* 2; $0{,}5P \leqslant P_1 < P_2 \leqslant P$ *и в интервале* $P_1 \leqslant x \leqslant P_2$ *вещественная функция* $f(x)$ *имеет непрерывные производные* $f'(x), \ldots, f^{(3n)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x)$ *и* $\varphi(x) = x f^{(n)}(x) + (n-1) f^{(n-1)}(x)$ *сохраняют неизменные знаки и при некотором* A, *удовлетворяющем условию*

$$c_1 P^{\frac{n+1}{2}} \leqslant A \leqslant c_2 P^{\frac{n+4}{2}},$$

выполняются неравенства

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6 P}{A}, \quad |f^{(3n)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{A P^{2n-0{,}25}}.$$

b) *Пусть, наконец,* K *— целое положительное и*

$$S = \sum_{k=1}^{K} \sum_{P_1 < p \leqslant P_2} e^{2\pi i k f(p)}.$$

Тогда будем иметь

$$|S| \leqslant c_8 K P^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{81 n^2 (\log n + 6)}.$$

Из теоремы 1 путем уже неоднократно применявшихся в моих прежних работах рассуждений легко получим теорему, являющуюся целью настоящего сообщения.

Теорема 2. *При условиях* а) *теоремы* 1 *и при условии* $0 < \sigma \leqslant 1$, *обозначая символом* T_σ *число простых чисел интервала* $P_1 < p \leqslant P_2$ *с условием* $0 \leqslant \{f(p)\} < \sigma$ *и символом* T *число всех простых чисел того же интервала, будем иметь*

$$T_\sigma = \sigma T + O(P^{1-\rho}); \quad \rho = \frac{1}{81 n^2 (\log n + 6)}.$$

Пример 1. Пусть P — целое, превосходящее 2, m — постоянное целое и, представляя число a в форме

$$a = F^{m+\alpha}$$

имеем $6 \leqslant \alpha \leqslant c_9$. Применим теорему 2 к функции

$$f(x) = \frac{a}{x^m}.$$

Здесь имеем

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)\,a}{x^{m+n}},$$

$$\varphi(x) = (-1)^n \frac{m^2(m+1)\ldots(m+n-2)\,a}{x^{m+n-1}}.$$

Полагая

$$A = \frac{P^{m+n}}{a} = P^{n-\alpha},$$

выберем n из условия

$$P^{\frac{n+1}{2}} \leqslant A \leqslant P^{\frac{n+4}{2}}.$$

Это условие равносильно такому:

$$2\alpha + 1 \leqslant n \leqslant 2\alpha + 4;$$

ему удовлетворим, например, взяв $n = [2\alpha + 2]$. Тогда в интервале $0{,}5P \leqslant x \leqslant P$ функции $f^{(n)}(x)$ и $\varphi(x)$, очевидно, не меняют знаков, причем, при надлежащем выборе c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, выполняются неравенства

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6 P}{A}, \quad |f^{(3n)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{P^{2n}}.$$

Поэтому при $0{,}P \leqslant P_1 < P_2 \leqslant P$, $0 \leqslant \sigma < 1$ будем иметь

$$T_\sigma = \sigma T + O(P^{1-\rho}); \quad \rho = \frac{1}{81 n^2 (\log n + 6)}.$$

Пример 2. Пусть $a > 2$ и $f(x) = a \log x$. Тогда при $x > 0$ путем несложных вычислений найдем $\varphi(x) = 0$. Следовательно, для решения вопроса о распределении дробных частей значений функции $f(p) = a \log p$, когда p пробегает простые числа некоторого интервала, теорема 2 неприменима, для решения этого вопроса следует изобрести новый метод.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
6 I 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, ДАН, 51, № 7 (1946).