

А. Л. ШАГИНЯ

**ЗАМЕТКИ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ПРИБЛИЖЕНИЙ
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ. II**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 I 1944)

1. Доказано (¹, ²), что возможность аппроксимации в среднем полиномами в областях с несвязным дополнением зависит от метрических свойств этих областей.

В последнее время (³) был указан предельный порядок убывания веса, когда в произвольной области с несвязным дополнением относительно всей плоскости имеет место полнота полиномов с весом в смысле приближений со средними квадратичными.

Интересно исследовать вопрос о полноте полиномов без веса в конкретных классах областей. В настоящей заметке мы решаем для некоторых классов областей с несвязными дополнениями задачу о взвешенно-равномерной аппроксимации полиномами. Далее исследуем для этих областей родственные с этой задачей вопросы о приближении в среднем, о равномерном приближении произвольных непрерывных функций на континуумах, разбивающих плоскость, а также вопрос об одновременной аппроксимации в нескольких областях.

2. Обозначим через B область на плоскости переменной z , ограниченную двумя соприкасающимися окружностями C_1 и C_2 ; пусть C_2 находится внутри C_1 и имеет центр в начале координат.

Точку соприкосновения этих окружностей обозначим через A .

Областью типа Δ_B будем называть произвольную область, находящуюся внутри B и при преобразовании $w = \sqrt{z}$ переходящую в область со связным дополнением, где возможна равномерная аппроксимация полиномами в замкнутой области.

Обозначим через ρ расстояние произвольной точки z до двойной точки A .

Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Если $f(z)$ — любая функция, аналитическая в области типа Δ_B , непрерывная вплоть до контура, за исключением, может быть, двойной точки A и удовлетворяющая условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(z) e^{-1/\rho} = 0,$$

то существует последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, для которых в области Δ_B :

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-1/\rho} |f(z) - P_n(z)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое.}$$

Одновременно можно указать функцию, например \sqrt{z} , для которой невозможна аппроксимация

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}} |\sqrt{z} - P_n(z)| \rightarrow 0, \quad z \in \Delta_B.$$

Справедливо утверждение более общее, чем последнее. Если для функции $f(z)$, регулярной в B , имеет место

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}} |f(z) - P_n(z)| \rightarrow 0,$$

то $f(z)$ аналитически продолжима внутрь окружности C_2 .

3. Обозначим через B_2 класс функций, регулярных в Δ_B и удовлетворяющих условию

$$\iint_{\Delta_B} |f(z)|^2 dx dy < \infty.$$

Через $T(\rho)$ обозначим линейную меру дуг, которые отсекает данная область Δ_B на окружности радиуса ρ с центром в кратной точке A .

Теорема 2. Если

$$T(\rho) < e^{-1/\rho^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то для любой $f(z)$ из класса B_2 в Δ_B

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Delta_B} |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0,$$

а если

$$T(\rho) > e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то существует область Δ_B и функция, например \sqrt{z} , для которой

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Delta_B} |\sqrt{z} - P_n(z)|^2 dx dy \neq 0.$$

Справедливо и следующее утверждение:

Если в Δ_B для функций $f(z)$ из класса B_2 допустима аппроксимация

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Delta_B} |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0$$

при условии $T(\rho) > e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}}$, то $f(z)$ регулярна везде внутри C_1 .

Теорема 2 следует из теоремы 1.

4. Для любой функции, непрерывной на ограниченной нигде не плотной и не разбивающей плоскости совокупности, возможна равномерная аппроксимация полиномами⁽⁴⁾.

Теорема 1 позволяет обобщить результат М. А. Лаврентьева на некоторый класс совокупностей, разбивающих плоскость.

Теорема 3. На любой нигде не плотной совокупности B^* , лежащей в B и переходящей при $w = \sqrt{z}$ в совокупность, не разбивающую плоскость, для любой непрерывной функции $f(z)$ возможна аппроксимация

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-1/\rho^{1+\varepsilon}} |f(z) - P_n(z)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0,$$

и существует совокупность такого же типа и некоторая непрерывная функция на ней, например \sqrt{z} на C_2 , для которой невозможна аппроксимация

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}} |\sqrt{z} - P_n(z)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0.$$

5. В случае двух областей, не имеющих общих точек, всегда возможна одновременная аппроксимация полиномами и в смысле равномерных приближений, и в смысле приближений средними.

Это же свойство сохраняется для областей, имеющих одну общую граничную точку ⁽⁵⁾.

Но если области имеют более одной общей граничной точки, то при исследовании полноты играют роль метрические свойства областей.

Из теоремы 1 следует некоторый метрический признак, указывающий, когда в двух областях, имеющих более одной общей граничной точки, имеет место полнота.

Теорема 4. Пусть Δ_B' и Δ_B'' две односвязных области в Δ_B , переходящие при $w = \sqrt{z}$ в области, имеющие не более одной общей граничной точки и допускающие равномерное полиномиальное приближение в замкнутой области; тогда для любых $f_1(z)$ и $f_2(z)$, соответственно регулярных внутри Δ_B' и Δ_B'' , непрерывных вплоть до контура, за исключением, может быть, кратной точки A и удовлетворяющих условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f_i(z) e^{-1/\rho} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

возможна аппроксимация

$$\left\{ \sup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z' \in \Delta_B'} e^{-1/\rho^{1+\varepsilon}} |f_1(z') - P_n(z')| + \sup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z'' \in \Delta_B''} e^{-1/\rho^{1+\varepsilon}} |f_2(z'') - P_n(z'')| \right\} \rightarrow 0;$$

полиномы $P_n(z)$ в обоих слагаемых берутся одни и те же.

Теорема 5. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — функции B_2 соответственно в областях Δ_B' и Δ_B'' ; тогда при условии

$$T(\rho) < e^{-1/\rho^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

возможна одновременная аппроксимация

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \iint_{\Delta_B'} |f_1(z) - P_n(z)|^2 dx dy + \iint_{\Delta_B''} |f_2(z) - P_n(z)|^2 dx dy \right\} \rightarrow 0.$$

А если

$$T(\rho) > e^{-1/\rho^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то такая аппроксимация, вообще говоря, невозможна.

6. Обозначим через D конечную односвязную область, находящуюся в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси и переходящую при $w = \sqrt{z}$ в область со связным дополнением. Обозначим через δ расстояние точки z до разреза $-\infty < x \leq 0$.

Теорема 6. Если $f(z)$ регулярна внутри D , непрерывна вплоть до контура, исключая, может быть, точки, лежащие на разрезе $-\infty < x \leq 0$, и удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(z) e^{-e^{1/\delta}} = 0,$$

то для нее возможна аппроксимация

$$\sup_{n \rightarrow \infty} e^{-e^{1/\delta^{1+\varepsilon}}} |f(z) - P_n(z)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое,}$$

и существуют функции, например, \sqrt{z} , для которых невозможна аппроксимация при весе $e^{-e^{1/\delta^{1-\varepsilon}}}$.

Более того, если для какой-либо функции указанного класса допустима аппроксимация при весе $e^{-e^{1/\delta}^{1-\varepsilon}}$, то отсюда уже следует регулярность этой функции и на разрезе $-\infty < x < 0$.

Отсюда следуют теоремы, аналогичные теоремам 2—5; приведем одну из них.

Проведем прямые, параллельные отрицательной части оси ox , на расстоянии δ от нее, и замкнем окружностью радиуса δ их концы у точки $z=0$. Обозначим через $T(\delta)$ линейную меру отрезков, которые отсекает область D на составленном таким образом контуре.

Теорема 7. Если

$$T(\delta) < e^{-e^{1/\delta}^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

то для любой $f(z)$ из класса B_2 в D возможна аппроксимация

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \int_D |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0;$$

а если

$$T(\delta) > e^{-e^{1/\delta}^{1-\varepsilon}},$$

то существуют область D и функция, например \sqrt{z} , для которых невозможна аппроксимация

$$\inf_{n \rightarrow \infty} \int_D |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0,$$

где D — соответствующим образом подобранная область. Такую область получим, если, например, возьмем кривые, выходящие из точки x_0 ($-\infty < x_0 < 0$) и имеющие уравнения

$$\frac{\sin n\varphi}{r^n} = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\sin n\varphi}{r^n} = \pm \frac{\pi}{8},$$

где $n/(n+1) > 1 - \varepsilon$, $\varphi = \arg(z - x_0)$, $r = |z - x_0|$, и замкнем их концы некоторыми дугами, огибающими начало координат.

Метод доказательства основных теорем 1 и 6 указан в (6).

Государственный университет им. В. М. Молотова,
г. Ереван

Поступило
26 I 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. В. Келдыш, Мат. сборн., 5, (47), № 2 (1939). ² А. Л. Шагинян, ДАН, XXVII, № 4 (1940). ³ М. В. Келдыш, ДАН, XXX, № 9 (1941). ⁴ М. А. Лаврентьев, Труды Мат. института им. В. А. Стеклова, V (1934). ⁵ А. Л. Шагинян, Изв. АН СССР, сер. математич., 5, № 4—5 (1941). ⁶ А. Л. Шагинян, ДАН, XXV, № 2 (1944).

От автора. В нашей предыдущей заметке, ДАН, т. XLIV, № 2, вкрались следующие ошибки:

	Напечатано	Должно быть
Стр. 52, строка 5 снизу	$1/z - 2i$	$1/z - 2ai$
Стр. 53, строка 1 сверху	$1/z - 2i$	$1/z - 2ai$
» » »	$e^{- z ^{1/2-\varepsilon}}$	$e^{- z ^{1-\varepsilon}}$
» » »	$e^{- z ^{1+\varepsilon}}$	$e^{- z ^{1+\varepsilon}}$
в теореме 5	$e^{- z ^{1-\varepsilon}}$	$e^{- z ^{1/2-\varepsilon}}$
»	$e^{- z ^{1-\varepsilon}}$	$e^{-1/ z ^{1/2-\varepsilon}}$
Стр. 54, теорема 8	$e^{- z ^{1-\varepsilon}}$	$e^{-1/ z ^{1/2-\varepsilon}}$