Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVI, № 8

МАТЕМАТИКА

В. ВАГНЕР

ОБОБЩЕНИЕ ТОЖДЕСТВ РИЧЧИ И БИАНКИ ДЛЯ СВЯЗНОСТИ В СОСТАВНОМ МНОГООБРАЗИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1944)

Рассмотрим составное многообразие $X_{n+(m)}$ [1] со связностью класса s, определяемой коэффициентами связности $\Gamma^a(u^c, \xi^\lambda, \xi^{(k)\lambda})$, где $\xi^{(k)\lambda} = d^{(k)}\xi^\lambda / dt^k$ $(k = 1, \ldots, s)$.

Пусть
$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t^1, t^2) \tag{1}$$
будут уравнения двумерной поверхности в базисном X_n.

Рассматривая отображения локальных X_m вдоль произвольного криволинейного четыреугольника $M_0(t^1, t^2)$, $M_1('t^1, t^2)$, $M_{12}('t^1, 't^2)$, $M_2(t^1, 't^2)$, образуемого координатными линиями, мы получаем точечные преобразования в локальном $X_m(M_0)$
$$'u^a = \underset{12}{H^a}(u^c, t^1, t^2, 't^1, 't^2), \tag{2}$$
принадлежащие к группе голономии в точке M_0.

В силу соотношения $\underset{12}{H^a}(u^c, t^1, t^2, t^1, 't^2) = \underset{12}{H^a}(u^c, t^1, t^2, 't^1, t^2) = u^a$ мы имеем, что первые частные производные от функции $\underset{12}{H^a}$ относительно переменных $'t^1$, $'t^2$ при значениях $'t^1 = t^1$, $'t^2 = t^2$ будут равны нулю. Подобным образом мы получаем, что из всех частных производных второго порядка при $'t^1 = t^1$, $'t^2 = t^2$ только смешанная производная будет отлична от нуля.

Может быть показано, что
$$\left(\frac{\partial^2 \underset{12}{H^a}}{\partial' t^1 \partial' t^2}\right)_{\substack{'t^1 = t^1 \\ 't^2 = t^2}} = -\underset{12}{R^a}, \tag{3}$$
где мы обозначаем
$$\underset{12}{R^a} = \frac{\partial \underset{2}{\Gamma^a}}{\partial t^1} - \frac{\partial \underset{1}{\Gamma^a}}{\partial t^2} + \underset{1}{\Gamma^a_c}\underset{2}{\Gamma^c} - \underset{2}{\Gamma^a_c}\underset{1}{\Gamma^c},$$
$$\underset{z}{\Gamma^a} = \Gamma^a(u^c, \xi^\alpha(t^1, t^2), \underset{z}{\xi^{(k)\alpha}}(t^1, t^2)), \quad \underset{z}{\xi^{(k)\alpha}} = \frac{\partial^k \xi^\alpha}{\partial t^{zk}}, \quad \underset{z}{\Gamma^a_c} = \frac{\partial \underset{z}{\Gamma^a}}{\partial u^c}, \tag{4}$$
$$z = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, s.$$

Если связность линейна, т. е. $\Gamma^a = \Gamma^a_\alpha(u^c, \xi^\lambda)\,\xi^{(1)\alpha}$, мы имеем
$$\underset{12}{R^a} = R_{\kappa\beta}{}^{\cdot\cdot a}\,\underset{1}{\xi^{(1)\alpha}}\,\underset{2}{\xi^{(1)\beta}}, \tag{5}$$

где

$$R_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot a} = \frac{\partial\Gamma^a_\beta}{\partial\xi^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^a_\alpha}{\partial\xi^\beta} + \Gamma^a_{\alpha c}\Gamma^c_\beta - \Gamma^a_{\beta c}\Gamma^c_\alpha. \tag{6}$$

Рассматривая отображения локальных X_m вдоль пути $M_0M_2M_{12}M_1M_0$, мы получаем точечное преобразование

$$'u^a = \underset{21}{H^a}(u^c,\ t^1,\ t^2,\ 't^1,\ 't^2), \tag{7}$$

являющееся обратным относительно преобразования (2).

Подобно равенству (3), мы имеем

$$\left(\frac{\partial^2 \underset{21}{H^a}}{\partial' t^1 \partial' t^2}\right)_{\substack{'t^1=t^1 \\ 't^2=t^2}} = -\underset{21}{R^a} = \underset{12}{R^a}. \tag{8}$$

Из равенства (3) следует, что, пренебрегая членами третьего порядка относительно приращений $\Delta t^1 = 't^1 - t^1$; $\Delta t^2 = 't^2 - t^2$, мы можем представить уравнения (2) в виде:

$$'u^a \approx u^a - \frac{1}{2}\underset{12}{R^a}(u^c,\ t^1,\ t^2)\,\Delta t^1 \Delta t^2. \tag{9}$$

Пусть $\overset{(a)}{\Omega^i}(u^c,\ t^1,\ t^2)$ $(i = 1, \ldots, N)$ — поле локального геометрического объекта класса r, определенное на поверхности (1). При преобразованиях координат в локальных X_m

$$u^{a'} = \delta^{a'}_a \varphi^a(\xi^\alpha,\ u^c) \tag{10}$$

компоненты этого геометрического объекта преобразуются согласно следующим равенствам:

$$\overset{(a')}{\Omega^i} = F^i\left\{\overset{(a)}{\Omega^j},\ u^a,\ \varphi^a(\xi^\lambda(t^1,\ t^2),\ u^c),\ \varphi^a_{b_1\ldots b_h}(\xi^\lambda(t^1,\ t^2)\ u^c)\right\}\ (h=1, \ldots, r), \tag{11}$$

где $\varphi^a_{b_1\ldots b_h}$ — частные производные от φ^a.

В результате точечного преобразования (2) в локальном $X_m(M_0)$ мы получаем из геометрического объекта $\overset{(a)}{\Omega^i}$ новый геометрический объект того же самого типа $*\underset{12}{\overset{(a)}{\Omega^i}}$

$$*\underset{12}{\overset{(a)}{\Omega^i}} = F^i\left\{\overset{(a)}{\Omega^j}(\underset{21}{H^c},\ t^1,\ t^2),\ \underset{21}{H^a},\ u^a,\ \underset{12}{H^a_{b_1\ldots b_h}}(\underset{21}{H^c},\ t^1,\ t^2,\ 't^1,\ 't^2)\right\}, \tag{12}$$

где

$$H^c_{21} = H^c_{21}(u^l,\ t^1,\ t^2,\ 't^1,\ 't^2),$$

$$H^a_{21} = H^a_{21}(u^c,\ t^1,\ t^2,\ 't^1,\ 't^2),$$

$\underset{12}{H^a_{b_1\ldots b_h}}$ — частные производные от H^a.

Рассматривая t^1, t^2 как фиксированные и $'t^1$, $'t^2$ как переменные, мы получаем двухпараметрическое множество геометрического объекта $*\underset{12}{\overset{(a)}{\Omega^i}}$ в локальном $X_m(M_0)$. Значения частных производных первого порядка от $\overset{(a)}{\Omega^i}$ относительно переменных $'t^1$, $'t^2$ при значениях $'t^1 = t^1$, $'t^2 = t^2$ будут равны нулю. Подобным образом из частных производных второго порядка только значение одной смешанной производной будет отлично от нуля.

Обозначая

$$\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i = -\left(\frac{\partial^2 \overset{*(a)}{\underset{12}{\Omega^i}}}{\partial' t^1 \partial' t^2}\right)_{\substack{'t^1 = t^1,\\ 't^2 = t^2}} \tag{13}$$

мы получаем с помощью равенств (3) и (8):

$$\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i = -\underset{12}{R^b}\left(\frac{\partial \overset{(a)}{\Omega^i}}{\partial u^b} + \underset{0}{F^i_b}\right) + \sum_{h=1}^{r} \underset{0}{F^i_{\varphi^a_{b_1 \ldots b_h}}}\, \underset{12}{R^a_{b_1 \ldots b_h}}, \tag{14}$$

где $\underset{0}{F^i_b}$, $\underset{0}{F^i_{\varphi^a_{b_1 \ldots b_h}}}$ — значения частных производных от F^i при $\varphi^a = u^a$ и $\underset{12}{R^a_{b_1 \ldots b_h}}$ — частные производные от R^a. Легко видеть, что $\frac{1}{2}\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i \Delta t^1 \Delta t^2$ совпадает с дифференциалом Ли ([2], стр. 135—137) от геометрического объекта $\overset{(a)}{\Omega^i}{}'$, соответствующим бесконечно малому точечному преобразованию (9) группы голономии.

При преобразованиях координат (10) $\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i$ преобразуются следующим образом:

$$\overset{H\,(a')}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i = F^i_{\Omega j}\left\{\overset{(a)}{\Omega^j},\ u^a,\ \varphi^a(\xi^\lambda(t^1, t^2), u^c),\ \varphi^a_{b_1 \ldots b_h}(\xi^\lambda(t^1, t^2), u^c)\right\}\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^j. \tag{15}$$

Отсюда следует, что $\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i$ определяют геометрический объект только в том случае, когда F^i будут линейными функциями от $\overset{(a)}{\Omega^i}$. Однако $\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i$ вместе с $\overset{(a)}{\Omega^i}$ всегда определяет геометрический объект.

Предположим, что связность линейна. В этом случае будем иметь

$$\overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i = \overset{H}{D}_{\alpha\beta}\overset{(a)}{\Omega^i}\,\overset{(1)}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\underset{2}{\xi}}{}^{\beta}, \tag{16}$$

где

$$\overset{H}{D}_{\alpha\beta}\overset{(a)}{\Omega}{}^i = -R^{\cdot\cdot b}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \overset{(a)}{\Omega^i}}{\partial u^b} + \underset{0}{F^i_b}\right) + \sum_{h=1}^{r} \underset{0}{F^i_{\varphi^a_{b_1 \ldots b_h}}}\, R^{\cdot\cdot a}_{\alpha\beta b_1 \ldots b_h}. \tag{17}$$

Пусть $D_{t^2}\overset{(a)}{\Omega^i}$ будет абсолютная производная от $\overset{(a)}{\Omega^i}$ вдоль координатных линий $t^1 = \text{const}$. $\overset{(a)}{\Omega^i}$, $D_{t^2}\overset{(a)}{\Omega^i}$ определяют поле локального геометрического объекта, заданное на поверхности (1). Рассматривая его абсолютную производную вдоль координатных линий $t^2 = \text{const}$, мы получаем объект $D_{t^1}D_{t^2}\overset{(a)}{\Omega^i}$, называемый смешанной абсолютной производной второго порядка. Подобным образом мы определяем смешанную абсолютную производную $D_{t^2}D_{t^1}\overset{(a)}{\Omega^i}$.

Может быть доказано, что имеет место обобщенное тождество Риччи

$$D_{t^1}D_{t^2}\overset{(a)}{\Omega^i} - D_{t^2}D_{t^1}\overset{(a)}{\Omega^i} = \overset{H\,(a)}{\underset{12}{D}}\,\Omega^i. \tag{18}$$

Пусть теперь

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(t^1, t^2, t^3) \tag{19}$$

будут уравнения трехмерной поверхности в базисном X_n. Обозначим через $\underset{12}{R^a}$, $\underset{23}{R^a}$, $\underset{31}{R^a}$ величины, аналогичные определенным равенством (4), которые соответствуют двумерным поверхностям $t^3 = \text{const}$, $t^1 = \text{const}$, $t^2 = \text{const}$, и через D_{t^1}, D_{t^2}, D_{t^3} — символы абсолютных производных вдоль координатных линий поверхности (19).

Рассмотрим восемь точек $M_0(t^1, t^2, t^3)$, $M_1('t^1, t^2, t^3)$, $M_2(t^1, 't^2, t^3)$, $M_3(t^1, t^2, 't^3)$, $M_{12}('t^1, 't^2, t^3)$, $M_{23}(t^1, 't^2, 't^3)$, $M_{13}('t^1, t^2, 't^3)$, $M_{123}('t^1, 't^2, 't^3)$.

Пусть

$$'u^a = \underset{123}{H^a}(u^c, t^1, t^2, t^3, 't^1, 't^2, 't^3) \tag{20}$$

будет преобразование группы голономии, соответствующее отображению локальных X_m вдоль пути $M_0M_1M_{12}M_{123}M_{13}M_1M_0M_3M_{23}M_2M_0$ $M_2M_{23}M_{123}M_{12}M_2M_0M_1M_{13}M_3M_0M_3M_{13}M_{123}M_{23}M_3M_0M_2M_{12}M_1M_0$.

Тогда может быть показано, что

$$\left(\frac{\partial^3 \underset{123}{H^a}}{\partial' t^1 \partial' t^2 \partial' t^3}\right)_{'t^i = t^i} = -D_{t^1}\underset{23}{R^a} - D_{t^2}\underset{31}{R^a} - D_{t^3}\underset{12}{R^a} = 0, \tag{21}$$

что дает обобщение тождества Бианки ([2], стр. 128—131) и его геометрическую интерпретацию для связности в составном многообразии.

Научно-исследовательский институт
Ленинградского государственного университета

Поступило
16 XI 1943

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Вагнер, ДАН, XL, № 3 (1943). [2] И. А. Схоутен и Д. Дм. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, I, 1939.