

Я. Л. ГЕРОНИМУС

**О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ И
СООТВЕТСТВУЮЩИХ СИСТЕМАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 27 VII 1940)

Построим полиномы

$$P_m^{(j)}(z) = \begin{vmatrix} z - a_j & 1 & 0 & 0 \\ l_{j+1} & z - a_{j+1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & l_{m+j-1} & z - a_{m+j-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} (j, m = 1, 2, \dots, k), \\ P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1, \end{matrix} \quad (1)$$

по заданным числам $\{a_m\}_1^k$, $\{l_m\}_1^k$, причем $l_m \neq 0$.

Построим двулиственную риманову поверхность алгебраической функции

$$\Phi(z) = \sqrt{[P_k^{(1)}(z) - l_1 P_{k-2}^{(2)}(z)]^2 - 4l}, \quad l = l_1, l_2, \dots, l_k; \quad (2)$$

обозначим ветви $\Phi(z)$ через $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z) = -\Phi_1(z)$, причем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(z)}{z^k} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi_2(z)}{z^k} = -1. \quad (3)$$

Теорема I. Если для уравнения в конечных разностях

$$y_n = (z - \alpha_n) y_{n-1} - \lambda_n y_{n-2}, \quad \lambda_n \neq 0, \quad (4)$$

существуют конечные пределы коэффициентов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = a_\nu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = l_\nu \neq 0, \quad n \equiv \nu \pmod{k}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, k), \quad (5)$$

то существует предел отношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+k}}{y_n} = r_i(z) = \frac{P_k^{(1)}(z) - l_1 P_{k-2}^{(2)}(z) + \Phi_i(z)}{2} \quad (i = 1 \text{ или } i = 2), \quad (6)$$

причем $|r_1(z)| \neq |r_2(z)|$.

Теорема II. Уравнение (4) при условиях

$$\alpha_{\nu+k} = \alpha_\nu = a_\nu, \quad \lambda_{\nu+k} = \lambda_\nu = l_\nu, \quad (\nu \geq s+1), \quad \lambda_n \neq 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

эквивалентно уравнению с постоянными коэффициентами

$$y_{n+2k} - [P_k^{(1)}(z) - l_1 P_{k-2}^{(2)}(z)] y_{n+k} + l y_n = 0, \quad (n = s-1, s, \dots); \quad (8)$$

функции $\{y_n\}_{s+1}^\infty$ могут быть представлены в явном виде

$$y_{m+ik} = \frac{r_1^i(z)[y_{m+k} - r_2(z)y_m] - r_2^i(z)[y_{m+k} - r_1(z)y_m]}{r_1(z) - r_2(z)}, \quad (9)$$

$(m = s-1, s, \dots, s+k-2; i = 0, 1, \dots).$

Рассмотрим теперь вещественные ограниченные последовательности $\{\alpha_n\}_1^\infty, \{\lambda_n\}_1^\infty$, обладающие свойством

$$\lambda_{\nu+k} = \lambda_\nu = l_\nu, \quad \alpha_{\nu+k} = \alpha_\nu = a_\nu, \quad (\nu \geq s+1), \quad \lambda_n > 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Теорема III. *Полиномы $\{P_n(x)\}_0^\infty$, удовлетворяющие уравнению $P_n(x) = (x - \alpha_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x)$, $(n = 0, 1, \dots)$, $P_{-1} = 0$, $P_0 = 1$, (11)*

при условии (10), ортогональны в некотором конечном интервале относительно такого обложения $d\psi(x)$: если обозначить через E точечное множество

$$E = \langle z_1, z_2 \rangle + \langle z_2, z_4 \rangle + \dots + \langle z_{2r-1}, z_{2r} \rangle, \quad r \leq k$$

[где z_1, z_2, \dots, z_{2r} — точки разветвления функции $\Phi(z)$], то при $x \in E$ имеем непрерывное распределение масс

$$d\psi(x) = p(x) dx, \quad p(x) = \left| \frac{\Phi(x)}{C(x)} \right|, \quad (12)$$

где $C(x)$ — полином степени не выше $k + 2s - 2$;

$$C(x) = P_{k+s-1}(x)P_s(x) - P_{k+s}(x)P_{s-1}(x) = P_s^2(x)P_{k-1}^{(1)}(x) - P_s(x)P_{s-1}(x)\{P_k^{(1)}(x) - l_1P_{k-2}^{(2)}(x)\} + l_1P_{s-1}^2(x)P_{k-1}^{(2)}(x); \quad (13)$$

кроме того в точках $x = x_\nu$, лежащих в конечном интервале вне множества E , сконцентрированы положительные массы μ_ν ,

$$\mu_\nu = 2 \lim_{x \rightarrow x_\nu} \{ |x - x_\nu| p(x) \} = \psi(x_\nu + 0) - \psi(x_\nu - 0); \quad (14)$$

точки $x = x_\nu$ являются теми из вещественных корней полинома $C(x)$, для которых выполняется при $m = s-1$ условие

$$\left| \frac{P_{m+k}(x_\nu)}{P_m(x_\nu)} \right| < \sqrt{l}; \quad (15)$$

оно влечет за собой аналогичное условие для всех $m \geq s$.

Примечание. Если заданы два произвольных полинома

$$P_s(x) = x^s + \dots, \quad P_{s-1}(x) = x^{s-1} + \dots, \quad (16)$$

все корни которых вещественны, различны и перемежаются, то по формуле (11) при условиях (10) можно построить систему $\{P_n(x)\}_{s+1}^\infty$; мы можем затем однозначно найти числа $\{\alpha_n\}_1^s, \{\lambda_n\}_2^s$ как коэффициенты непрерывной дроби

$$\frac{P_{s-1}(x)}{P_s(x)} = \frac{1}{|x - a_s|} - \frac{\lambda_s}{|x - a_{s-1}|} - \dots - \frac{\lambda_2}{|x - a_1|}, \quad (17)$$

причем $\lambda_n > 0$ ($n = 2, 3, \dots, s$); таким образом можно построить всю систему $\{P_n(x)\}_0^\infty$ и она будет ортогональна относительно найденного обложения $d\psi(x)$.

Пусть, в частности, $k = 1$ *; положим для простоты

$$\lambda_{s+1} = \lambda_{s+2} = \dots = \frac{1}{4}; \quad \alpha_{s+1} = \alpha_{s+2} = \dots = 0; \quad (18)$$

* См. акад. С. Н. Бернштейн (1).

в таком случае на отрезке $\langle -1, +1 \rangle$ имеем

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{P_s^2(x) - xP_s(x)P_{s-1}(x) + \frac{1}{4}P_{s-1}^2(x)}; \quad (19)$$

кроме того в тех корнях x_v знаменателя, в которых

$$|P_s(x_v)| < \frac{1}{2} |P_{s-1}(x_v)|,$$

сконцентрированы массы μ_v ; пусть, например, $k=1, s=2$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \alpha^2, \quad \alpha > 0;$$

в таком случае

$$x_1 = -x_2 = \frac{2\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2 - 1}}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2\alpha^2}, & \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ 0 & \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$$

в точках отрезка $\langle -1, +1 \rangle$ имеем

$$p(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_1^2 - x^2}.$$

Положим теперь $s=0, k=2$; вводя обозначения

$$x - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = y, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = c, \quad a^2 = c^2 + (\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})^2, \\ b^2 = c^2 + (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})^2,$$

мы имеем

$$p(x) = \frac{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}}{2|x - c|}, \quad x \in E = \langle -b, -a \rangle + \langle a, b \rangle;$$

в точке $x_1 = c$ сконцентрирована масса

$$\mu_1 = \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}, & \lambda_1 > \lambda_2; \\ 0, & \lambda_1 \leq \lambda_2. \end{cases}$$

Следствие. Из (9) ясно, что для полиномов $\{P_n(x)\}$ при $i \rightarrow \infty$ и $x \neq x_v$ имеет место асимптотическая формула

$$P_{m+ik}(x) \sim \frac{r_1^i(x) [P_{m+k}(x) - r_2(x) P_m(x)]}{r_1(x) - r_2(x)}, \quad (m = s-1, s, \dots, s+k-2),$$

равномерно для всех значений x из области $|r_1(x)| \geq \sqrt{l} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ не зависит от i .

Хотя эта асимптотическая формула выведена нами для ортогональных полиномов весьма специального вида, тем не менее, как нам кажется, она представляет интерес потому, что в нашем случае функция $\psi(x)$ обладает интервалами постоянства и изолированными точками роста; обычно же при выводе асимптотических формул для ортогональных полиномов предполагают, что $d\psi(x) = p(x)dx$, где функция $p(x)$ должна быть почти всюду положительна в интервале ортогональности и, кроме того, должна быть подчинена еще некоторым дополнительным условиям^(2, 3).

Институт математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
1 VIII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Акад. С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьк. мат. о-ва, IV, 79—93 (1930).
² G. Szegő, Math. Ann., 82, 188—212 (1920). ³ Акад. С. Н. Бернштейн, С. Р., 188, 361—364 (1929).