Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 7

ГИДРОТЕХНИКА

В. В. КРЕЧМЕР

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА

(Представлено академиком Б. Е. Веденеевым 4 VII 1940)

Saint-Venant'ом [1] дано решение задачи о стержне, нижний закрепленный конец которого удерживается сопротивлением механически неизменяемой среды, а верхний — свободный — подвергается продольному удару. Уравнение продольных волн упругих деформаций есть:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \tag{1}$$

где a — скорость распространения волны.

Условие для закрепленного конца $s=0$:

$$w = 0; \tag{2}$$

условие для свободного конца $s=l$:

$$ml \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial w}{\partial s}, \tag{3}$$

где l — длина стержня, m — отношение массы ударяющего груза к массе стержня.

Начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &w = 0 \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant s < l, \\ &\lim_{t=+0} \frac{\partial w}{\partial t} = -V \ \text{при} \ t=0 \ \text{и} \ s=l, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где V — скорость груза в момент удара.

Решение уравнения (1) с учетом условия (2) есть:

$$w = f(at-s) - f(at+s). \tag{5}$$

Это выражение должно быть определено для положительных значений t и для всех значений s, заключенных в интервале $(0, l)$; тогда напряжение и скорость сечения s в момент t суть:

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial s} = -E\,[f'(at-s) + f'(at+s)], \tag{6}$$

$$v = \frac{\partial w}{\partial t} = a\,[f'(at-s) - f'(at+s)]. \tag{7}$$

Функция $f'(\zeta)$ определяется для последовательных интервалов изменения ζ: $(-l, l)$, $(l, 3l)$, $(3l, 5l)$ и т. д. при помощи уравнения:

$$f''(\zeta) + \frac{1}{ml} f'(\zeta) = f''(\zeta - 2l) - \frac{1}{ml} f'(\zeta - 2l), \tag{8}$$

вытекающего из уравнения (3); при этом делается предположение, что скорость в точке $s=l$ в момент $t=\frac{2l}{a}$ изменяется непрерывно. Последнее предположение не подтвердилось произведенными нами расчетами; мы получили при $t=\frac{2l}{a}-0$ и $s=l$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-Ve^{-\frac{2}{m}}, \tag{9}$$

при $t=\frac{2l}{a}$ и $s=l$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-V\left(e^{-\frac{2}{m}}-1\right). \tag{10}$$

Нами сделано следующее предположение о характере разрыва скорости в точке $s=l$ в момент $t=\frac{2l}{a}$: при $t=\frac{2l}{a}+0$ и $s=l$ будет также:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-Ve^{-\frac{2}{m}}, \tag{11}$$

так как отражение волны деформаций не сопровождается отдачей кинетической энергии. Аналогичный характер имеют разрывы скорости в точке $s=l$ в моменты: $t=\frac{4l}{a}$, $\frac{6l}{a}$ и т. д., а также разрывы скорости в точке $s=0$ в моменты $t=\frac{l}{a}$, $t=\frac{3l}{a}$ и т. д. Другой характер имеют разрывы скорости в точке $s=0$ в случае продольного удара о стержень, заделанный в деформируемую среду. Решение такой задачи было дано Н. М. Герсевановым [2], применившим теорию продольного удара к исследованию поведения сваи, забиваемой в грунт. Это исследование было произведено с целью получения нового решения задачи о формулах отказа.

Для задачи о формулах отказа было предложено много решений, однако они не привели к положительным результатам, так как расчеты были основаны на непосредственном применении методов теории сопротивления материалов. Новое решение задачи, основанное на применении теории продольного удара, позволяет наряду с искомыми соотношениями между величинами P_∂ (динамическое сопротивление грунта) и δ (отказ сваи) находить также выражения, определяющие напряжения $\sigma=E\frac{\partial w}{\partial s}$ и скорости $v=\frac{\partial w}{\partial t}$ любого сечения сваи s в любой момент времени t. Это существенным образом облегчило экспериментальную проверку решения.

Условие для нижнего конца в задаче Н. М. Герсеванова без учета сил трения, распределенных по боковой поверхности сваи при $s=0$:

$$\sigma=E\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{P_\partial}{F}=Ep=\mathrm{const}, \tag{12}$$

причем

$$Ep<2E\frac{V}{a}.$$

Решение уравнения (1):

$$w=f(at-s)+f(at+s)-ps. \tag{13}$$

Напряжение и скорость сечения s в момент t:

$$\sigma=E\frac{\partial w}{\partial s}=-E\left[f'(at-s)-f'(at+s)+p\right], \tag{14}$$

$$v=\frac{\partial w}{\partial t}=a\left[f'(at-s)+f'(at+s)\right]. \tag{15}$$

За начальный момент $t=0$ принят момент начала осаживания сваи, соответствующий моменту захвата сечения $s=0$ волной деформаций. Н. М. Герсевановым определена функция $f'(\zeta)$ в интервалах: $(-l, 0)$ и $(0, l)$; нами определена функция $f'(\zeta)$ в интервалах $(l, 2l)$, $(2l, 4l)$ и исследована в следующих за ними интервалах.

Отказ определяется при помощи равенства $\delta=(w)_{\substack{s=0\\ t=T}}$, где T — продолжительность осаживания. В пределах определений Н. М. Герсеванова величина T определяется из уравнения:

$$2Ve^{-\frac{aT}{ml}}-pa=0; \tag{16}$$

в пределах наших определений из уравнения:

$$Te^{-\frac{aT}{ml}}+\frac{l}{2a}\left[m\left(\frac{2pa}{V}+e^{-\frac{2}{m}}-1\right)-4\right]e^{-\frac{aT}{ml}}-\frac{3pml}{4V}e^{-\frac{2}{m}}=0. \tag{17}$$

При помощи подстановки $T=\alpha\xi+\beta$, где

$$\alpha=\frac{3pml}{4V}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2pa}{V}+e^{-\frac{2}{m}}-1\right)}, \tag{18}$$

$$\beta=-\frac{l}{2a}\left[m\left(\frac{2pa}{V}+e^{-\frac{2}{m}}-1\right)-4\right], \tag{19}$$

уравнение (17) приводится к виду:

$$e^{N\xi}-\xi=0, \tag{20}$$

где

$$N=\frac{a\alpha}{ml}. \tag{21}$$

Положив: $\xi=\sum\limits_{k=0}^{\sim}c_kN^k$, получим из (20):

$$\sum_{k=0}^{\sim}c_kN^{k+1}=\ln\left(\sum_{k=0}^{\sim}c_kN^k\right), \tag{22}$$

или взяв производные:

$$\sum_{k=0}^{\sim}c_kN^k\cdot\sum_{k=0}^{\sim}(k+1)c_kN^k=\sum_{k=1}^{\sim}kc_kN^{k-1}. \tag{23}$$

Отсюда, заметив, что $c_0=1$, получим для определения c_k рекуррентную систему:

$$\left.\begin{aligned}c_{2n-1}&=\frac{2n}{2n-1}\left(c_{2n-2}+c_1c_{2n-3}+c_2c_{2n-4}+\ldots+c_{n-2}c_n+\frac{1}{2}c_{n-1}^2\right),\\ c_{2n}&=\frac{2n+1}{2n}\left(c_{2n-1}+c_1c_{2n-2}+c_2c_{2n-3}+\ldots+c_{n-2}c_{n+1}+c_{n-1}c_n\right).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Описанными здесь способами дано также решение задачи, в которой учтено влияние сил трения, распределенных по боковой поверхности сваи, подвергнутой продольному удару.

Дальнейшие исследования обнаружили необходимость учета процесса, происходящего в голове сваи при ударе; этот процесс протекает в условиях, отличных от предположений Saint-Venant'а. Нами было также выяснено, что в подвергнутой продольному удару свае наряду с сжимающими возникают и значительные осевые растягивающие усилия; эти усилия не находят отображения в формулах, вытекающих из теории Saint-Venant'а. Кроме этого произведенные исследования обнаружили, что основной недостаток получаемых по теории Saint-Venant'а формул состоит в допущении, что в момент удара верхнее сечение сваи получает скорость, общую со скоростью ударяющего груза и равную $V=\sqrt{2gH}$. Мы полагаем, что вследствие значительной потери энергии, обусловленной процессом в голове сваи, расчет деформаций и напряжений надо вести, принимая значение скорости равным:

$$V_1 = \alpha V \quad (0 < \alpha < 1). \tag{25}$$

Попытка применить к расчету α способ Hertz'a (3) и способ Sears'a (4), основанный на комбинированной теории, объединяющей теории Hertz'a и Saint-Venant'a, не привела для задачи о продольном ударе о сваю к положительному результату. При этом обнаружилось, что примененные Sears'ом расчеты содержат ряд недостатков. Примененное Sears'ом равенство $\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left\{p_{\left(t-\frac{x}{v}\right)}\right\}dx$, где p — напряжение, v — скорость распространения упругих деформаций, справедливо лишь при движении волны деформаций только в одном направлении. Члены примененного Sears'ом уравнения:

$$\rho S dx \ddot{\xi} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left\{p_{\left(t-\frac{x}{v}\right)}\right\}dx = 0 \tag{26}$$

неоднородны по измерению; во втором члене уравнения производится дифференцирование функции в точке ее разрыва, так как в момент захвата сечения волной деформаций напряжение в сечении терпит разрыв непрерывности.

Нами была сделана попытка эмпирического определения входящего в равенство (25) коэффициента α, с использованием для этого тщательных наблюдений, произведенных при помощи электрических телеметров Институтом пути и строительства НКПС на площадке строившегося моста через Волгу в Горьком. Эти наблюдения показали, что для железобетонных свай, снабженных наголовниками, α изменяется в интервале 0,30 — 0,35; для свай, не снабженных наголовниками, — в интервале 0,35 — 0,40. Наблюдения подтвердили, что в стойке, подвергнутой продольному удару, помимо сжимающих напряжений, возникают и значительные осевые растягивающие напряжения. Было также обнаружено, что при динамических нагрузках модуль упругости повышается на 15 — 25%, а пластические деформации не возникают даже тогда, когда напряжения в два раза превосходят предел упругости для статической нагрузки. Наблюдения показали, что приближенный расчет сжимающих и растягивающих напряжений в сечениях сваи при продольном ударе можно произвести, исходя из выражающего основное колебание частного интеграла уравнения (1):

$$w = S\,(A_1 \cos kt + A_2 \sin kt), \tag{27}$$

где k — частота колебаний и $S=\Phi(s)$, сохраняя концевые условия (2) и (3); сохранение условия (2) приводит к погрешности, направленной в сторону запаса прочности. Тогда вместо (1) может быть рассмотрено уравнение:

$$a^2\frac{d^2S}{ds^2} + k^2 S = 0. \tag{28}$$

Условие (3) приводится к равенству:

$$\frac{1}{m} = \beta \operatorname{tg} \beta, \tag{29}$$

где $\beta = \frac{kl}{a}$, из которого определяется k. Частота колебаний может быть определена также при помощи приближенного способа Rayleigh'a (5). Амплитуды колебаний определяются с учетом равенства (25).

Определение входящего в равенство (25) коэффициента α может облегчить нахождение достоверных решений задачи о формулах отказа, если предположить наличие соотношения:

$$T_1 = \alpha^2 T_0, \tag{30}$$

где T_0 — кинетическая энергия, сообщенная свае при ударе,

$$T_1 = P\delta \tag{31}$$

— полезная работа сваи. Вытекающее из (30) равенство

$$\nu = \frac{P}{U}, \tag{32}$$

где $U = \frac{T_0}{\delta}$ и $\nu = \alpha^2 = F(U)$, позволяет получать многочисленные опытные определения функции $F(U)$ в зависимости от свойств грунта, материала сваи и других условий, при которых происходит продольный удар о сваю, удерживаемую сопротивлением грунта.

Трест глубоких работ
Народного Комиссариата
по строительству СССР

Поступило
9 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. E. H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, IV ed. (1927). [2] Тр. Гидролого-гидротехн. ин-та НКПС, в. 124, сб. VIII (1930). [3] H. Hertz, Ges. Werke, I (1895). [4] Trans. of the Cambridge Phil. Soc., XXI (1908). [5] Rayleigh, The Theory of Sound, I (1926).