Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 7

МАТЕМАТИКА

В. И. ШНЕЙДМЮЛЛЕР

О КОЛЬЦАХ С КОНЕЧНЫМИ УБЫВАЮЩИМИ ЦЕПЯМИ ПОДКОЛЕЦ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 29 VI 1940)

§ 1. В теории бесконечных групп уже создана значительная теория для групп с обрывом убывающих цепочек подгрупп, а также для групп с условием локальной конечности. К этой теории примыкают следующие до сих пор не решенные проблемы: 1) является ли всякая периодическая группа локально конечной (проблема Бернсайда), 2) является ли группа с обрывом убывающих цепочек подгрупп счетной и локально конечной [1]. В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы для колец.

§ 2. Кольцо R обладает конечными убывающими цепями подколец, если всякая его последовательность подколец

$$R_1 , R_2 , \dots R_i , R_{i+1} ,$$

где всякое R_{i+1} является истинным подкольцом кольца R_i, обрывается на конечном месте.

Теорема. *Аддитивная группа кольца с конечными убывающими цепями подколец является периодической группой.*

Доказательство. Пусть аддитивная группа кольца R есть группа без кручения, т. е. все ее элементы кроме нуля имеют бесконечный порядок. В силу обрыва убывающих цепочек подколец в R можно найти наименьшее кольцо, отличное от 0. Это наименьшее кольцо как кольцо без подколец конечно, но его аддитивная группа состоит из элементов бесконечного порядка, что невозможно. Если же аддитивная группа кольца R смешанная, то совокупность элементов конечного порядка в кольце R образует идеал J. Аддитивная группа кольца вычетов $\frac{R}{J}$ есть группа без кручения, а этот случай уже рассмотрен.

Известно, что периодическая абелева группа разлагается в прямую сумму примарных групп. Легко видеть, что это приводит к разложению кольца в прямую сумму двусторонних идеалов с примарными аддитивными группами. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением колец, аддитивные группы которых примарны.

§ 3. Идеал A кольца R называется нильпотентным, если некоторая его степень A^n равна идеалу (0). Собственно нильпотентный элемент есть элемент, порождающий нильпотентный двусторонний идеал. Совокупность всех собственно нильпотентных элементов кольца R есть двусторонний идеал, который содержит все нильпотентные правые и левые идеалы; этот идеал называется радикалом. Радикал в кольце с конечными убывающими цепями подколец нильпотентен ([2]). Если мы обозначим радикал кольца R через $\mathfrak{R}$, то кольцо вычетов $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ будет без радикала, так как $\mathfrak{R}$ — максимальный нильпотентный идеал в R.

§ 4. Теорема. *В кольце с конечными убывающими цепями подколец радикал $\mathfrak{R}$ является не более чем счетным.*

Доказательство. Как отмечено в § 3, для некоторого n будет $\mathfrak{R}^n = 0$. Если $n = 2$, то произведение двух любых элементов из $\mathfrak{R}$ равно 0. В этом случае всякая подгруппа аддитивной группы является подкольцом в $\mathfrak{R}$. Следовательно, аддитивная группа кольца $\mathfrak{R}$ будет с конечными убывающими цепями подгрупп, а поэтому она является прямой суммой конечного числа циклических и квазициклических групп ([3]). Отсюда следует ее счетность. В общем случае будет

$$\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{R}^{n-1} \supset R^n = (0).$$

Из доказанного выше следует счетность всякого кольца вычетов $\frac{\mathfrak{R}^i}{\mathfrak{R}^{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому счетно само кольцо $\mathfrak{R}$.

§ 5. Известно ([4]), что кольцо без радикала с условием минимальности для левых идеалов (тем более кольцо с условием конечности цепочек подколец) равно двусторонней прямой сумме колец R_ν, каждое из которых изоморфно полному кольцу матриц относительно поля K_ν.

Применяя это к кольцу вычетов нашего кольца R по его радикалу $\mathfrak{R}$, мы получим, что $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ счетно, если только счетны все соответствующие поля K_ν.

Отсюда ввиду § 4 следует: несчетные кольца с конечными убывающими цепями подколец могут существовать лишь в том случае, если существуют несчетные поля с конечными убывающими цепями подколец, т. е. несчетные поля конечной характеристики с конечными убывающими цепями подполей.

§ 6. Поле K_ν может быть в нашем случае лишь конечной характеристики. Оно получается из своего простого поля путем алгебраического расширения. Отсюда видно, что такие поля, если рассматривать только коммутативные алгебраические расширения, могут быть двух типов: 1) конечное поле Галуа характеристики p, 2) объединение полей Галуа характеристики p, которые содержат следующее число элементов: первое p^{q_1}, второе $p^{q_1 \cdot q_2}$, третье $p^{q_1 \cdot q_2 q_3}$ и т. д., где q_1, q_2, q_3 — различные простые числа. Поэтому ввиду § 5 всякое коммутативное кольцо с конечными убывающими цепями подколец счетно.

§ 7. Кольцо называется локально конечным, если любое конечное множество его элементов порождает конечное подкольцо.

Теорема 1. *Всякое локально конечное кольцо с конечными убывающими цепями подколец счетно.*

Доказательство. Радикал $\mathfrak{R}$ нашего кольца R является счетным. Нам остается доказать счетность кольца вычетов $\frac{R}{\mathfrak{R}}$. Это кольцо есть конечная прямая сумма полных колец матриц над некоторыми полями. Достаточно показать, что эти поля счетны. Пусть x и y — любые два элемента одного из этих полей K_ν. В силу локальной конечности они порождают конечное кольцо без делителей нуля, которое, как известно, является коммутативным полем, а поэтому $xy = yx$, т. е. поле K_ν коммутативно и поэтому ввиду § 6 счетно.

Теорема 2. *Кольцо R с конечными убывающими цепями подколец тогда и только тогда локально конечно, если кольцо вычетов $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ не содержит некоммутативных полей.*

Доказательство. Необходимость условия доказывается так же, как теорема 1. Переходим к доказательству его достаточности. Если кольцо $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ не содержит некоммутативных полей, то оно есть двусторонняя прямая сумма полных колец матриц над локально конечными (ввиду § 6) коммутативными полями, т. е. само локально конечно. Пусть теперь в кольце R даны элементы $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Классы вычетов по $\mathfrak{R}$, представителями которых эти элементы служат, порождают в $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ конечное подкольцо, содержащее s элементов. Всякое произведение $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_{s+1}}$ элементов $r_1, r_2, \ldots, r_m$, состоящее из $s+1$ множителей, может быть поэтому заменено суммой его отрезка от начала, имеющего меньшую длину, и элемента a_σ из радикала, где σ служит обозначением для системы $(i_1, i_2, \ldots, i_{s+1})$. Индукцией по длине произведения можно теперь доказать, что всякое произведение элементов $r_1, r_2, \ldots, r_m$ равно сумме редуцированных произведений элементов $r_1, r_2, \ldots, r_m$ и a_σ, т. е. произведений, в которых может встретиться не более чем s идущих подряд множителей вида r_i. Вместе с тем, ввиду $\mathfrak{R}^n = (0)$ в каждом из этих произведений элементы вида a_σ не могут встречаться n раз, а так как различных элементов a_σ лишь конечное число, то число различных редуцированных произведений конечно. Эти элементы порождают в аддитивной группе кольца R конечную подгруппу и поэтому порождают в R конечное подкольцо.

§ 8. Из доказательства теоремы 2 предыдущего параграфа видно, что вопрос о локальной конечности любого кольца с конечными убывающими цепями подколец сводится к доказательству локальной конечности поля (полей K_ν). Поле с конечными убывающими цепями подколец не содержит элементов бесконечного порядка по умножению, так как тогда всевозможные полиномы от такого элемента образовывали бы бесконечное коммутативное поле с элементами бесконечного порядка по умножению, чего ввиду § 6 не может быть. Поэтому это поле K_ν может быть не локально конечным, а тем более несчетным, лишь в том случае, когда конечное число элементов этого поля по умножению порождает бесконечную периодическую группу.

Следствие. *Из существования не локально конечных (а тем более несчетных) колец с конечными убывающими цепями подколец следовало бы отрицательное решение проблемы Бернсайда в теории групп.*

Кафедра математики
Смоленского гос. пед. института
им. Карла Маркса

Поступило
1 VII 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Изв. АН, сер. мат., 4, № 1 (1940). [2] Hopkins, Duke Math. J., 4, 664—667 (1938). [3] A. Kurosch, Math. Ann., 106, 107—113 (1932). [4] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. II, гл. 16 (1937).