Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 2

ГИДРОДИНАМИКА

Л. И. СЕДОВ

О НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 VI 1944)

В настоящей работе мы указываем общий метод, основанный на соображениях теории размерностей, для отыскания точных решений физических уравнений. В ряде случаев этот простой метод позволяет получать семейства решений, зависящих от некоторых произвольных параметров. Обычно легко охарактеризовать физические гипотезы, которые приводят к решениям получаемого типа. Сущность метода мы выясняем на примере получения новых важных семейств точных решений для уравнений неустановившихся одномерных движений сжимаемой жидкости.

Можно указать целый ряд случаев, когда соображения теории размерностей применялись для усовершенствования изложения известных результатов. Однако соображения теории размерностей, повидимому, еще не применялись для получения новых решений уравнений математической физики и для выяснения свойств семейства решений, которые можно получить таким путем.

В одномерных неустановившихся движениях жидкости за независимые переменные возьмем время t и линейную координату r. За основные искомые величины возьмем скорость частиц жидкости v ($[v]=LT^{-1}$), плотность ρ ($[\rho]=ML^{-3}$) и давление p ($[p]=ML^{-1}T^{-2}$). Очевидно, что функции $\rho(r, t)$ и $p(r, t)$ обязательно содержат некоторые размерные физические постоянные, так как размерности плотности и давления зависят от символа единицы массы.

Рассмотрим случаи, когда искомые функции содержат размерные постоянные, среди которых имеется только одна или две постоянных с независимыми размерностями. Эти специальные движения могут представить самостоятельный интерес или могут оказаться предельными движениями, если в пределе среди задаваемых физических характеристик существенны только одна или только две характеристики с независимыми размерностями.

Рассмотрим сначала случай, когда имеется только одна размерная постоянная, которую обозначим через a. Не уменьшая общности, предположим, что формула размерности для a имеет вид:

$$[a]=ML^k T^s,$$

где k и s — постоянные. Для величин v, ρ и p можно написать формулы:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{r}{t}V, \\ \rho &= \frac{aR}{r^{k+3}\,t^s}, \\ p &= \frac{aP}{r^{k+1}\,t^{s+2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Очевидно, что отвлеченные величины V, R и P не могут зависеть от r и t и, следовательно, могут быть только постоянными. Таким образом, гипотеза о том, что существенна только одна постоянная a, дает возможность полностью определить зависимость v, ρ и p от r и t.

Если кроме постоянной a есть еще постоянная b

$$[b] = L^m T^n,$$

где m и n — постоянные *, то из определяющих величин r, t, a, b можно образовать переменный отвлеченный параметр λ

$$\lambda = b r^{-m} t^{-n}.$$

В этом случае величины V, R и P могут зависеть от λ. Гипотеза о существенности только двух постоянных a и b позволяет установить общий вид распределения значений v, ρ и p при $t = 0$. Из теории размерностей находим:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 b^{-\frac{1}{n}} r^{1+\frac{m}{n}}, \\ \rho &= \rho_0 a b^{-\frac{s}{n}} r^{\frac{ms}{n}-k-3}, \\ p &= p_0 a b^{-\frac{s}{n}-\frac{2}{n}} r^{\frac{ms}{n}-k-1+\frac{2m}{n}}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где v_0, ρ_0, p_0 — отвлеченные постоянные, которые, в частности, могут равняться нулю или бесконечности **.

Для получения условий, которым должны удовлетворять величины, входящие в формулы (1), необходимо обратиться к уравнениям движения. Очевидно, что для справедливости принятых гипотез, в общем случае, необходимо, чтобы уравнения движения не содержали других размерных величин кроме тех, которые входят в формулы (1).

Для определенности задачи возьмем уравнения движения жидкости в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho v}{r} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \dfrac{p}{\rho^\gamma}}{\partial t} + v\frac{\partial \dfrac{p}{\rho^\gamma}}{\partial r} = 0, \qquad (4)$$

где γ — некоторая отвлеченная постоянная. При $\nu = 1$ имеем плоские волны, при $\nu = 2$ — цилиндрические и при $\nu = 3$ — сферические.

При $\gamma = c_p/c_v$ уравнения (3) и (4) можно рассматривать как уравнения адиабатных движений газа, когда энтропия может быть различной у разных частиц газа.

---

* Очевидно, что при $n \neq 0$ существенно только отношение m/n.

** v_0, ρ_0, p_0 можно рассматривать как функции от r, имеющие постоянные значения при $r \neq 0$ и $r \neq \infty$ и имеющие, в общем случае, точки разрыва при $r = 0$ и $r = \infty$.

Подставляя формулы (1) в уравнения (3) и (4), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\left[(n+mV)V'+m\frac{P'}{R}\right]=V^2-V-(k+1)\frac{P}{R},\\
&\lambda\left[mV'+(n+mV)\frac{R'}{R}\right]=-s-(k-\nu+3)V,\\
&\lambda(n+mV)\left[\frac{P'}{P}-\gamma\frac{R'}{R}\right]=-s(1-\gamma)-2-[k(1-\gamma)+1-3\gamma]V.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Если постоянная b отсутствует, то левые части уравнений (5) нужно заменить нулями, в результате получаются три простых конечных соотношения, связывающих V, R, P, k, s. Следовательно, в этом случае формулы (1) дают семейство точных решений уравнений (3) и (4), зависящее от двух произвольных постоянных. Заменяя t через $t-t_0$, получим решение, зависящее от трех произвольных постоянных.

При $\nu=1$ в формулах (1) координату r можно заменить через $r-r_0$, после чего получим решение, зависящее от четырех произвольных постоянных.

Интегрирование системы уравнений (5) можно свести к интегрированию одного уравнения вида:

$$d\left(\frac{P}{R}\right)\Big/ dV=\frac{P}{R}f\left(V,\frac{P}{R}\right), \quad (6)$$

где $f\left(V,\frac{P}{R}\right)$ — дробно-линейная функция от $\frac{P}{R}$ и простая рациональная функция от V.

С помощью других более сложных математических приемов Bechert (1) указал метод получения точных решений уравнений (3) такого же типа в частном случае, когда уравнение (4) заменяется конечным соотношением:

$$p=c\rho^\gamma,$$

где c — постоянная.

Найденные нами точные решения можно использовать для решения ряда важных задач; некоторые приложения мы дадим в другой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 VI 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Bechert, Ann. d. Phys., 39, H. 3 (1941).