Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVIII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ЗАДАННЫХ ВНЕШНИХ СИЛАХ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 14 IV 1940)

В предыдущей статье * мы дали решение первой основной задачи теории упругости. Теперь перейдем к решению второй основной задачи. В этом случае задача сводится к отысканию двух регулярных в области** S функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из предельных условий***:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C_j\\ \text{на } L_j\quad (j=1,\ldots,m+1).\end{array}\right\} \tag{1}$$

Здесь C_j—некоторые подлежащие определению постоянные, из них можно считать $C_{m+1}=0$. Функция $f(t)$ определяется по заданным внешним силам; предположим, что она удовлетворяет условию Гельдера. Кроме того, для функции $f(t)$ необходимо выполняется равенство

$$R\int\limits_L f(t)\,\overline{dt}=0, \tag{2}$$

выражающее обращение в нуль главного момента действующих на L внешних сил (R, как обычно,—символ вещественной части).

Искомые регулярные функции ищем следующим образом. Полагаем ****

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt+\sum_1^m\frac{b_j}{z-z_j},\\ \psi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar t\,\omega(t)}{(t-z)^2}\,dt+\\ \qquad+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,\overline{dt}+\sum_1^m\frac{\bar b_j}{z-z_j},\end{array}\right\} \tag{3}$$

* См. ДАН, XXVII, № 9 (1940).

** Сохраняем здесь обозначения, принятые в предыдущей статье [звездочки сверху у $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ опускаем].

*** См. ссылку([2]) в цитированной статье.

**** Напомним, что z_j суть произвольно фиксированные точки в областях S_j ($j=1, \ldots, m$).

где $\omega(t)$ — новая неизвестная функция, b_j — функционалы, равные:

$$b_j = i \int_{L_j} \{\omega(t)\, \overline{dt} - \overline{\omega(t)}\, dt\} \tag{4}$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Заметим, что все b_j — вещественные числа. Помимо этого, постоянные C_j также выбираем в виде функционалов

$$C_j = -\int_{L_j} \omega(t)\, ds \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Переходим в формулах (3) к пределу, устремляя z к точке t_0 кривой L. Полученные выражения для $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$ подставим в равенство (1) и прибавим (считая начало координат лежащим в S) к левой части еще оператор $\frac{b_{m+1}}{t_0} + \frac{\overline{b_{m+1}}}{\bar{t}_0}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)$, где b_{m+1} — чисто мнимая величина, равная

$$b_{m+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{m+1}} \left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\, dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\, \overline{dt}\right\}. \tag{6}$$

После этого будем иметь следующее интегральное уравнение Фредгольма для определения $\omega(t)$:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t)\, d \lg \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\omega(t)}\, d \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} +$$

$$+ \sum_1^{m+1} \left\{\frac{b_j}{t_0 - z_j} + \frac{\bar{b}_j}{\bar{t} - \bar{z}_j}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_j}\right)\right\} - C_j = f(t), \tag{7}$$

где z_{m+1} следует считать равным нулю.

При сохранении обозначений (3) это уравнение, очевидно, может быть записано в виде

$$\varphi(t) + t\, \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + b_{m+1}\left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} + \frac{t}{\bar{t}^2}\right\} - C_j = f(t). \tag{8}$$

Умножим обе части последнего уравнения на $\overline{dt}$ и проинтегрируем по контуру L. После простых преобразований получим:

$$\int_L \{\varphi(t)\, \overline{dt} - \overline{\varphi(t)}\, dt\} + b_{m+1} \int_L \left\{\frac{\overline{dt}}{t} + \frac{dt}{\bar{t}}\right\} + 2\pi i\, b_{m+1} = \int_L f(t)\, \overline{dt}.$$

Последнее слагаемое в левой части равенства — вещественная величина, все остальные слагаемые — чисто мнимые величины. Поэтому

$$b_{m+1} = 0. \tag{9}$$

Итак, всякое решение уравнения (7), если таковое существует, удовлетворяет условию (9) и, следовательно, также равенству

$$\varphi(t) + t\, \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - C_j = f(t) \text{ на } L, \tag{10}$$

совпадающему по виду с исходным (1).

Докажем теперь, что уравнение (7) разрешимо. Пусть $\omega_0(t)$ обозначает решение соответствующего однородного уравнения. Последнее может быть записано в виде:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}-C_j^{(0)}=0\\ \text{на } L_j \qquad (j=1,\ldots,m+1),\end{array}\right\} \tag{11}$$

где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $b_j^{(0)}$ и $C_j^{(0)}$ определяются через $\omega_0(t)$ по формулам (3), (4), (5) и (6), причем $C_{m+1}^{(0)}=0$.

Очевидно, функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ дают решение второй основной задачи теории упругости для области S при нулевых внешних силах на границе. По теореме единственности везде в области S:

$$\varphi_0(z)=ikz+C, \quad \psi_0(z)=-\overline{C}, \tag{12}$$

где C — некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная, k — вещественное число, причем все

$$C_j^{(0)}=0 \qquad (j=1,\ldots,m+1). \tag{13}$$

Введем новые функции

$$\left.\begin{array}{l} i\delta(t)=\omega_0(t)+\sum\limits_1^m \dfrac{b_j^{(0)}}{t-z_j}-ikt-C,\\ i\chi(t)=\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\,\omega_0'(t)+\sum\limits_1^m \dfrac{b_j^{(0)}}{t-z_j}+\overline{C},\end{array}\right\} \tag{14}$$

которые, как нетрудно усмотреть из равенств (3) [при замене в последних $\omega(t)$ на $\omega_0(t)$], будут регулярны в областях S_j $(j=1,\ldots,m+1)$ и равны нулю на бесконечности. С помощью первого из уравнений (14), а также (6) и (9) без труда найдем: $k=0$.

Исключая, далее, из тех же уравнений (14) $\omega_0(t)$, получим:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{\delta(t)}+\bar{t}\,\delta'(t)+\chi(t)=i\sum\limits_1^m b_j^{(0)}\left\{\dfrac{1}{\bar{t}-\bar{z}_j}-\dfrac{1}{t-z_j}+\dfrac{\bar{t}}{(t-z_j)^2}\right\}-2i\overline{C}\\ \text{на } L_j \qquad (j=1,\ldots,m+1).\end{array}\right\} \tag{15}$$

Умножим обе части последнего равенства на dt и проинтегрируем по каждой из кривых L_e $(e=1,\ldots,m)$

$$\int_{L_e}\left\{\overline{\delta(t)}\,dt-\delta(t)\,\overline{dt}\right\}=i\sum_1^m b_j^{(0)}\int_{L_e}\left\{\frac{dt}{\bar{t}-\bar{z}_j}+\frac{\overline{dt}}{t-z_j}\right\}-2\pi b_e^{(0)} \quad (e=1,\ldots,m).$$

Отсюда следует (так как $b_j^{(0)}$ — вещественны), что

$$b_j^{(0)}=0 \quad (j=1,\ldots,m) \tag{16}$$

и поэтому

$$\overline{\delta(t)}+\bar{t}\,\delta'(t)+\chi(t)=-2i\overline{C} \text{ на } L_j \quad (j=1,\ldots,m+1). \tag{17}$$

Аналогично формулам (12) будем теперь иметь (учитывая условия на бесконечности):

$$\delta(z)=ik_jz+D_j, \quad \chi(z)=-\overline{D_j}$$

в области S_j $(j=1,\ldots,m+1)$, где k_j — некоторые вещественные, D_j, вообще говоря, комплексные числа и $C=D_{m+1}=k_{m+1}=0$.

Но тогда

$$\omega_0(t)=-k_jt+iD_j \text{ на } L_j \quad (j=1,\ldots,m+1).$$

где $\omega(t)$ — новая неизвестная функция, b_j — функционалы, равные:

$$b_j = i\int_{L_j}\left\{\omega(t)\,\overline{dt} - \overline{\omega(t)}\,dt\right\} \tag{4}$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Заметим, что все b_j — вещественные числа. Помимо этого, постоянные C_j также выбираем в виде функционалов

$$C_j = -\int_{L_j}\omega(t)\,ds \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{5}$$

Переходим в формулах (3) к пределу, устремляя z к точке t_0 кривой L. Полученные выражения для $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$ подставим в равенство (1) и прибавим (считая начало координат лежащим в S) к левой части еще оператор $\frac{b_{m+1}}{t_0} + \frac{\overline{b_{m+1}}}{\overline{t_0}}\left(1 - \frac{t_0}{\overline{t_0}}\right)$, где b_{m+1} — чисто мнимая величина, равная

$$b_{m+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\overline{t}^2}\,\overline{dt}\right\}. \tag{6}$$

После этого будем иметь следующее интегральное уравнение Фредгольма для определения $\omega(t)$:

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\lg\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t_0}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t_0}} +$$

$$+ \sum_1^{m+1}\left\{\frac{b_j}{t_0 - z_j} + \frac{\overline{b_j}}{\overline{t} - \overline{z_j}}\left(1 - \frac{t_0}{\overline{t_0} - \overline{z_j}}\right)\right\} - C_j = f(t), \tag{7}$$

где z_{m+1} следует считать равным нулю.

При сохранении обозначений (3) это уравнение, очевидно, может быть записано в виде

$$\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + b_{m+1}\left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{\overline{t}} + \frac{t}{\overline{t}^2}\right\} - C_j = f(t). \tag{8}$$

Умножим обе части последнего уравнения на $\overline{dt}$ и проинтегрируем по контуру L. После простых преобразований получим:

$$\int_L\left\{\varphi(t)\,\overline{dt} - \overline{\varphi(t)}\,dt\right\} + b_{m+1}\int_L\left\{\frac{\overline{dt}}{t} + \frac{dt}{\overline{t}}\right\} + 2\pi i\, b_{m+1} = \int_L f(t)\,\overline{dt}.$$

Последнее слагаемое в левой части равенства — вещественная величина, все остальные слагаемые — чисто мнимые величины. Поэтому

$$b_{m+1} = 0. \tag{9}$$

Итак, всякое решение уравнения (7), если таковое существует, удовлетворяет условию (9) и, следовательно, также равенству

$$\varphi(t) + t\,\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - C_j = f(t) \text{ на } L, \tag{10}$$

совпадающему по виду с исходным (1).

Наконец, используя последовательно равенства (4), (16) и (5), (13), легко найдем, что все $k_j = D_j = 0$ и, значит, $\omega_0(t) = 0$.

Таким образом, уравнение (7) всегда имеет единственное решение. Определив из него $\omega(t)$, найдем по формулам (3) искомые функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Этим исчерпывается решение задачи.

Если область S — односвязная, то необходимо положить $C_j = b_j = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда, отделяя в уравнении (7) вещественные и мнимые части, будем иметь систему двух вещественных интегральных уравнений, отличающуюся от системы Lauricella ([1]) (полученной им при решении второй основной задачи теории упругости для односвязной области) на некоторые простые операторы.

Отметим, что интегральные уравнения, полученные нами при решении обеих основных задач, оказались строго эквивалентными соответствующим граничным условиям. Очевидно, это обстоятельство принципиально упрощает самую структуру интегральных уравнений.

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР

Поступило
17 IV 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Lauricella, Acta Math., **32** (1909).