Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

З. КОЗЛОВА

О КРАТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 I 1940)

Впервые понятие кратной отделимости было введено П. С. Новиковым [1]. В дальнейшем ряд работ различных авторов был посвящен установлению отдельных теорем кратной отделимости [2]. Целью настоящего сообщения является систематизация ряда вопросов, связанных с кратной отделимостью, в первую очередь—выяснение взаимной зависимости теорем кратной отделимости, а также установление некоторых новых теорем этого типа.

Во всем дальнейшем (U) обозначает некоторую систему подмножеств множества X, (CU)—систему их дополнений.

Система (U) называется s-, d-(σ-, δ-) системой, если она инвариантна относительно конечных (счетных) сумм или пересечений, и m-системой, если общая часть систем (U) и (CU) [система $M(U)$] есть (s, d)-система.

Введем следующую систему аксиом кратной отделимости.

I группа аксиом отделимости

Аксиома I_2: Если

$$E_1 \in (U),\quad E_2 \in (U) \quad \text{и} \quad E_1 \cdot E_2 = 0,$$

то существуют

$$H_1 \in M(U) \quad \text{и} \quad H_2 \in M(U)$$

такие, что

$$H_1 \supset E_1,\quad H_2 \supset E_2 \quad \text{и} \quad H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Аксиома I_k. Если

$$E_1 \in (U),\quad E_2 \in (U), \ldots, E_k \in (U)$$

и

$$\prod_{n=1}^{k} E_n = 0,$$

то существуют

$$H_1 \in M(U),\quad H_2 \in M(U), \ldots, H_k \in M(U)$$

такие, что

$$H_n \supset E_n \quad (n = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{k} H_n = 0.$$

Аксиома $\mathrm{I}_{\text{п}}$ [$\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$]. Если

$$E_1 \in (U),\quad E_2 \in (U), \ldots , E_n \in (U), \ldots$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0 \text{ [соответственно } \underline{\lim}\ E_n = 0,\ \overline{\lim}\ E_n = 0],$$

то существуют

$$H_1 \in M(U),\quad H_2 \in M(U), \ldots ,\quad H_n \in M(U), \ldots$$

такие, что

$$H_n \supset E_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0 \text{ [соответственно } \underline{\lim}\ H_n = 0,\ \overline{\lim}\ H_n = 0].$$

II группа аксиом отделимости

Аксиома II_2. Если

$$E_1 \in (U) \quad \text{и} \quad E_2 \in (U),$$

то существуют

$$H_1 \in (CU) \quad \text{и} \quad H_2 \in (CU)$$

такие, что

$$H_1 \supset E_1 - E_1 \cdot E_2,\quad H_2 \supset E_2 - E_1 \cdot E_2$$

и

$$H_1 \cdot H_2 = 0.$$

Аксиома II_k. Если

$$E_1 \in (U),\quad E_2 \in (U), \ldots , E_k \in (U),$$

то существуют

$$H_1 \in (CU),\qquad H_2 \in (CU), \ldots , H_k \in (CU)$$

такие, что

$$H_n \supset E_n - \prod_{m=1}^{k} E_m \quad (n = 1, 2, \ldots , k) \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{k} H_n = 0.$$

Аксиома $\mathrm{II}_{\text{п}}$ ($\mathrm{II}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{II}_{\overline{\lim}}$]. Если

$$E_1 \in (U),\quad E_2 \in (U), \ldots , E_n \in (U), \ldots ,$$

то существуют

$$H_1 \in (CU),\quad H_2 \in (CU), \ldots , H_n \in (CU), \ldots$$

такие, что

$$H_n \supset E_n - \prod_{m=1}^{\infty} E_m \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

[соответственно $H_n \supset E_n - \underline{\lim}\ E_n$, $H_n \supset E_n - \overline{\lim}\ E_n$]

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0 \text{ [соответственно } \underline{\lim}\ H_n = 0,\ \overline{\lim}\ H_n = 0].$$

III группа аксиом отделимости

Аксиомы III_2, III_k, $\mathrm{III}_{\text{п}}$, $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$ получаются из соответствующих аксиом группы II, если вместо условия $H_n \in (CU)$ наложить условие $H_n \in (U)$.

IV группа аксиом отделимости

Аксиомы IV_2, IV_k, IV_Π, $IV_{\underline{\lim}}$, $IV_{\overline{\lim}}$ получаются из соответствующих аксиом группы II, если дополнительно потребовать, чтобы множества системы (U) были попарно без общих точек.

I группа аксиом отделимости

Тип множеств \ Операции	I_2	I_k	I_Π	$I_{\underline{\lim}}$	$I_{\overline{\lim}}$
A	$\boxed{+*}$	+*	+*	+	+*
él α	$\boxed{+*}$	+*	+*	+	—*
CA	—*	—*	—	—	—*
inf α	—*	—*	—	—	?

II группа аксиом отделимости

Тип множеств \ Операции	II_2	II_k	II_Π	$II_{\underline{\lim}}$	$II_{\overline{\lim}}$
A	+*	$\boxed{+*}$	$\boxed{+*}$	+*	+*
él α	$\boxed{+*}$	+*	$\boxed{+*}$	+*	—
CA	—	—	$\boxed{—}$	—	—
inf α	—	—	—	—	?

III группа аксиом отделимости

Тип множеств \ Операции	III_2	III_k	III_Π	$III_{\underline{\lim}}$	$III_{\overline{\lim}}$
A	—	—	—	—	—
él α	—	—	—	—	?
CA	+*	+*	?	?	?
inf α	+*	+*	—	—	—

IV группа аксиом отделимости

Тип множеств \ Операции	IV_2	IV_k	IV_Π	$IV_{\underline{\lim}}$	$IV_{\overline{\lim}}$
A	+*	+*	+*	+*	+*
él α	+*	+*	+*	+*	$\boxed{—}$
CA	—	—	?	?	$\boxed{—}$
inf α	$\boxed{—}$	?	?	?	?

Отметим ранее известные случаи взаимной зависимости аксиом отделимости.

1. Теорема П. С. Новикова [1]. *Если в (d, m)-системе выполняется аксиома I_2, то выполняется и аксиома I_k.*

2. Теорема S. Ruziewitch [2]. *Если в (s, d)-системе выполняется аксиома II_2 (или аксиома III_2), то выполняется и аксиома II_k (или аксиома III_k).*

3. Теорема Н. Н. Лузина [3]. *Если в системе (U) выполняется аксиома II_2 (или аксиома III_2), то в системе (CU) выполняется аксиома III_2 (или аксиома II_2).*

Мне удалось установить ряд новых случаев взаимной зависимости аксиом кратной отделимости.

Теорема I. *Если в σ-системе [δ-системе] (U) выполняется аксиома II_Π [соответственно III_Π], то выполняются и аксиомы II_k, II_2 [соответственно III_k, III_2].*

Теорема II. *Если в s-системе (U) выполняется аксиома II_Π, то выполняется и аксиома $II_{\underline{\lim}}$.*

Теорема III. *Если в σ-системе (U) выполняется аксиома II_Π, то выполняется и аксиома $II_{\overline{\lim}}$.*

Теорема IV. *Если в системе (U) выполняются аксиома I_2 и*

---

* Звездочкой отмечены аксиомы отделимости, известные ранее.

аксиома II_α *(где* α*—любой из символов* k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$), *то в системе* (U) *выполняется и аксиома* I_α.

Теорема V. *Если в* σ*-системе* (U) *выполняется аксиома* IV_2 *(или аксиома* IV_k), *то выполняются и аксиомы* $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$, IV_Π *и* $\mathrm{IV}_{\underline{\lim}}$.

Теорема VI. *Если в произвольной системе* (U) *выполняется аксиома* I_Π, *то выполняется и аксиома* I_2.

Теорема VII[1]. *Если в* δ*-системе* (U) *выполняется аксиома* $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, *то выполняется и аксиома* III_2.

Теорема VII[2]. *Если в* δ*-системе* (U) *выполняется аксиома* I_2, *а в системе* (CU) *выполняется аксиома* $\mathrm{I}_{\underline{\lim}}$, *то в системе* (CU) *выполняется и аксиома* I_2.

Теорема VIII. *Если в системе* (U) *выполняется аксиома* I_α (α*—любой из символов* $2, k, \Pi$, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$), *а в системе* (CU) *выполняется аксиома* II_α, *то в системе* (CU) *выполняется и аксиома* I_α.

Теорема IX. *Если в* d*-системе* (U) *выполняется аксиома* III_α (α*—любой из символов* 2, k, Π, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$), *то в системе* (CU) *выполняется аксиома* IV_α.

Теорема X. *Если в* (σ, d)*-системе* (U) *выполняется аксиома* III_Π, *то выполняется и аксиома* $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$.

Теорема XI. *Если в* (σ, d)*-системе* (U) *выполняется аксиома* $\mathrm{III}_{\underline{\lim}}$, *то выполняется и аксиома* $\mathrm{III}_{\overline{\lim}}$.

Эти теоремы позволяют построить теорию кратной отделимости B-, A- и CA-множеств в приведенных на стр. 110 таблицах где столбцы соответствуют аксиомам, строки — системам множеств. Знак + означает, что для соответствующей системы множеств соответствующая аксиома выполнена. Знак — означает, что аксиома не выполнена, знак ? означает, что выполнимость аксиомы нам неизвестна. Те предложения, которые требуют самостоятельного доказательства, взяты в линейки; все остальные являются следствиями из них.

В построении этих таблиц мы будем опираться на следующую лемму, являющуюся обобщением критерия неповышения класса:

Лемма. Семейство él α не удовлетворяет аксиоме $\mathrm{IV}_{\overline{\lim}}$.

Педагогический институт
им. К. Либкнехта
Москва

Поступило
25 II 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Новиков, ДАН, II, № 5 (1934). [2] П. С. Новиков, ДАН, III, № 3 (1934); IV, № 1—2 (1934); А. А. Ляпунов, ДАН, II, № 5 (1934); Мат. сб., 1 (43): 4; S. Ruziewitch, Fund. Math., XXIV; V. Sierpinski, Fund. Math., XXIII. [3] N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris (1930).