Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 9

МАТЕМАТИКА

Б. З. ВУЛИХ

СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ОБРАТНОГО ЭЛЕМЕНТА В ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 I 1940)

§ 1. Как и в предыдущей заметке (1), X—линейное полуупорядоченное пространство, удовлетворяющее аксиомам I — V и содержащее единицу **1**.

Определение. Если для данного x существует y, для которого $e_y = e_x$ и $xy = e_x$, то y назовем обратным элементом для x и обозначим его x^{-1}*.

В качестве примера укажем, что в функциональных пространствах, перечисленных в § 5 предыдущей заметки (1), обратный элемент функции $x(t)$, если он существует, определяется функцией

$$x^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{x(t)}, & \text{где } x(t) \neq 0 \\ 0, & \text{где } x(t) = 0, \end{cases}$$

а его существование зависит от того, принадлежит ли эта функция тому же пространству, что и $x(t)$.

1° Обратный элемент, если он существует, определяется единственным образом. Действительно, пусть $xy = xz = e_x$ и $e_y = e_z = e_x$. Тогда $x(y - z) = 0$. По 21° и 3° (1) $\inf(e_x, e_{y-z}) = 0$, но по 2° (1) $e_{y-z} \leqslant e_x$, следовательно, $e_{y-z} = 0$, т. е. $y = z$.

2° Если x^{-1} существует, а α—вещественное число, то существует $(\alpha x)^{-1}$ и для $\alpha \neq 0$ $(\alpha x)^{-1} = \frac{1}{\alpha} x^{-1}$.

3° Если xy, x^{-1}, y^{-1} и $x^{-1}y^{-1}$ существуют, то существует $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

4° Если x^{-1} существует, а $x = y + z$, причем $\inf(|y|, |z|) = 0$, то y^{-1} и z^{-1} существуют и $x^{-1} = y^{-1} + z^{-1}$.

Действительно, имеем $e_x = e_y + e_z$. Отсюда

$$x^{-1} = x^{-1}e_x = x^{-1}e_y + x^{-1}e_z,$$

а также

$$e_y = e_x e_y = (x^{-1}e_y)\, x = (x^{-1}e_y)\, y + (x^{-1}e_y)\, z.$$

Но по 21° (1) $(x^{-1}e_y)\, z = 0$, следовательно, $(x^{-1}e_y)\, y = e_y$, т. е. $x^{-1}e_y = y^{-1}$. Аналогично, $x^{-1}e_z = z^{-1}$.

Из 4° следует

---

* Заметим, что $e^{-1} = e$ для всякого единичного элемента e; в частности, $0^{-1} = 0$.

5° Если x^{-1} существует, то существуют $(x_+)^{-1}$, $(x_-)^{-1}$ и $|x|^{-1}$, и $x^{-1}=(x_+)^{-1}-(x_-)^{-1}$, $|x|^{-1}=(x_+)^{-1}+(x_-)^{-1}=|x^{-1}|$. Обратно, если существуют $(x_+)^{-1}$ и $(x_-)^{-1}$, то существует x^{-1}.

6° Если $x>0$ и x^{-1} существует, то $x^{-1}>0$.

Существование обратного элемента зависит от сходимости некоторого трансфинитного ряда. Пусть $x>0$. Построим ряд

$$\sum_{\xi<\nu}\beta_\xi e_\xi\,, \tag{1}$$

где числа β_ξ определяются следующим образом. Сначала определим числа ε_ξ $(\xi<\nu)$. Если $\inf(e_\xi,\ e_x)<e_\xi$, полагаем $\varepsilon_\xi=0$. Если же $e_\xi\leqslant e_x$, полагаем сначала $\gamma_\xi=\max\lambda$, для которых $\lambda e_\xi\leqslant x$, затем δ_ξ равным supremum' у всех γ_μ, для которых $e_\mu\leqslant e_\xi$, и, наконец, $\varepsilon_\xi=\delta_\xi^{-1}$ (при этом считаем $\infty^{-1}=0$). Теперь по индукции определяем числа β_ξ. Во-первых, полагаем $\beta_1=\varepsilon_1$. Далее, пусть β_ξ уже определены для $\xi<\mu$ $(\mu<\nu)$ и при этом ряд $\sum\limits_{\xi<\mu}\beta_\xi e_\xi$ сходится, а y—его сумма. Для каждого $e_\xi\leqslant e_\mu$ положим $\varkappa_\xi=\max\lambda$, для которых $\lambda e_\xi\leqslant y$, а затем

$$\beta_\mu=\inf(\varepsilon_\xi-\varkappa_\xi),$$

где inf берется относительно тех ξ, для которых $e_\xi\leqslant e_\mu$. При этом по индукции можно проверить, что для каждого $\mu\leqslant\nu$

$$\sum_{\xi<\mu}\beta_\xi e_\xi\geqslant\lambda e_{\xi_0}\ \text{ влечет }\ \lambda\leqslant\varepsilon_{\xi_0},$$

а следовательно, все $\beta_\xi\geqslant 0$. Если же уже для некоторого $\mu<\nu$ ряд $\sum\limits_{\xi<\mu}\beta_\xi e_\xi$ расходится, то полагаем для $\mu\leqslant\xi<\nu$ $\beta_\xi=0$ (например).

Имеет место следующая теорема:

7° Для существования x^{-1} (для $x>0$) необходимо и достаточно, чтобы ряд (1) сходился. При этом его сумма равна x^{-1}.

Наметим доказательство. Пусть x^{-1} существует. Нетрудно проверить, что $\varepsilon_\xi=\max\lambda$, для которых $\lambda e_\xi\leqslant x^{-1}$. Отсюда следует, что ряд (1) сходится и если y—его сумма, то $y\leqslant x^{-1}$. Чтобы доказать, что $y=x^{-1}$, сначала устанавливается, что $y\geqslant\varepsilon_\xi e_\xi$ для каждого ξ. Предположим теперь, что $y<x^{-1}$. Тогда по 4° ([1]) $y+\rho e_\mu<x^{-1}$ при некоторых $e_\mu>0$, $\rho>0$, следовательно, $x^{-1}>(\varepsilon_\mu+\rho)\,e_\mu$, а это противоречит указанному выше свойству ε_μ. Таким образом $y=x^{-1}$.

Обратно, если ряд (1) сходится и y—его сумма, то легко проверяется, что $e_y=e_x$. Затем устанавливается, что существует $xy\leqslant e_x$. Предположим, что $xy<e_x$. Отсюда легко выводится, что существуют $e^*\leqslant e_x$ $(e^*>0)$ и $\sigma>0$ такие, что $xye^*\leqslant(1-\sigma)e^*$. Из 11° ([1]) следует, что существуют $e\leqslant e^*$ $(e>0)$ и $B>0$ такие, что $xe\leqslant Be$, причем в качестве B берем наименьшее возможное. Пусть $e=e_\mu$. Очевидно, $\varepsilon_\mu\geqslant\dfrac{1}{B}$, следовательно, $y\geqslant\dfrac{1}{B}e$. Тогда $\dfrac{1}{B}xe\leqslant(1-\sigma)\,e$, или $xe\leqslant B\,(1-\sigma)\,e$, а это противоречит определению числа B. Таким образом $xy=e_x$.

8° Если x^{-1} существует, а $|y|\geqslant|x|$ и $e_y=e_x$, то y^{-1} существует и $|y^{-1}|\leqslant|x^{-1}|$*.

Вследствие 4° и 5° достаточно доказать 8° для $y>x>0$. А для этого по 7° достаточно построить ряд (1) для y и показать, что он сходится и что сумма его $\leqslant x^{-1}$.

---

* При этом, если $|y|>|x|$, то $|y^{-1}|<|x^{-1}|$.

9° Для каждого x существует y такой, что $e_y=e_x$ и $|y|\geqslant|x|$, для которого y^{-1} существует.

Действительно, можно положить $y=|x|+e_x$.

10° Если x^{-1} существует, а e—произвольный единичный элемент, то существует $(xe)^{-1}=x^{-1}e$.

§ 2. С помощью обратного элемента можно установить еще некоторые свойства произведения.

11° Пусть $x_0=\sup A$ (или $\inf A$), $A=\{x\}$, $y\geqslant 0$. Если xy существует для всех $x\in A$ и x_0y существует, то $x_0y=\sup xy$ (или $\inf xy$).

Проведем доказательство для случая, когда $x_0=\inf A=0$. Остальные случаи легко сводятся к этому. Предположим, что $xy\geqslant z>0$. Положим $\bar{y}=e_y+y$. Подавно $x\bar{y}\geqslant z$, а отсюда следует, что $(x\bar{y})\,\bar{y}^{-1}\geqslant z\bar{y}^{-1}>0$. Но тогда $\inf x\geqslant z\bar{y}^{-1}$, и мы пришли к противоречию.

12° Пусть множества $A=\{x\}$ и $B=\{y\}$ ограничены, $x,y\geqslant 0$, $x_0=\sup A$, $y_0=\sup B$ и x_0y_0 существует. Тогда $x_0y_0=\sup xy$.

13° Пусть множества $A=\{x\}$ и $B=\{y\}$ ограничены, x, $y\geqslant 0$, $x_0=\sup A$, $y_0=\sup B$. Если при всяких $x\in A$ и $y\in B$ существует xy, причем множество всех произведений xy тоже ограничено, то существует x_0y_0.

Действительно, пусть $xy\leqslant z<\infty$. Достаточно доказать, что для каждого фиксированного y существует x_0y и что все x_0y ограничены. Имеем

$$x(y+e_y)\leqslant z+x_0.$$

Так как существует $(y+e_y)^{-1}\leqslant e_y$, то $x_0e_y\leqslant(z+x_0)(y+e_y)^{-1}$. Но произведение $[(z+x_0)\,(y+e_y)^{-1}]\,(y+e_y)$ существует и $\leqslant z+x_0$. Следовательно, $x_0(y+e_y)$ существует и $\leqslant z+x_0$. А тогда и $x_0y\leqslant z+x_0$.

14° Если $x_n\to 0$*, $|y_n|\leqslant y_0<\infty$, произведения x_ny_n существуют при всех n и $|x_ny_n|\leqslant y_0^*<\infty$, то $x_ny_n\to 0$.

Общий случай с помощью перехода к модулям легко сводится к случаю, когда $x_n, y_n\geqslant 0$. По 13° существует произведение $\sup x_n\cdot\sup y_n$. Положим $z_n=\sup\limits_{p\geqslant n}x_p\cdot\sup\limits_{p\geqslant 1}y_p$. По 11° $\inf z_n=0$, т. е. $z_n\to 0$. С другой стороны, $\sup(x_ny_n,\ x_{n+1}y_{n+1},\ \ldots)\leqslant z_n$, следовательно, $x_ny_n\to 0$.

Из 14° следует

15° Если $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ и x_ny_n существует при всех n, причем $|x_ny_n|\leqslant z<\infty$, то $x_ny_n\to x_0y_0$.

§ 3. Здесь мы укажем некоторые свойства обратных элементов, связанные с операциями sup и inf и с предельным переходом.

16° Если $z=\sup(x,y)$ и x^{-1} и y^{-1} существуют, то z^{-1} существует.

Для доказательства достаточно представить z в виде $z=xe_1+ye_2$, где e_1 и e_2—единичные элементы, а $e_1+e_2=\mathbf{1}$, и воспользоваться 10°.

17° Пусть $x_0=\sup A$, $A=\{x\}$, $x>0$ и пусть $e=\inf\limits_{x\in A}e_x$. Если существуют x^{-1} для всех $x\in A$ и x_0^{-1}, то $x_0^{-1}e=\inf(x^{-1}e)$.

Действительно, пусть сначала $e_x=e$ для всех $x\in A$. По 1° (1) $e_{x_0}=e$. Вследствие 8° $x_0^{-1}\leqslant\inf x^{-1}$. С другой стороны, $x\cdot\inf x^{-1}\leqslant e$ для всех $x\in A$, следовательно, по 13° и 11° существует $x_0\cdot\inf x^{-1}\leqslant e$. Но $x_0\cdot x_0^{-1}=e$, а тогда $x_0^{-1}\geqslant\inf x^{-1}$, следовательно, $x_0^{-1}=\inf x^{-1}$. В общем случае полагаем $y=xe$, $y_0=x_0e$. По 11° $y_0=\sup y$, по 10° существуют $y^{-1}=x^{-1}e$ и $y_0^{-1}=x_0^{-1}e$, а тогда по доказанному $y_0^{-1}=\inf y^{-1}$, что и требовалось доказать.

18° Пусть $x_0=\inf A$, $A=\{x\}$, $x>0$. Если существуют x^{-1} для всех $x\in A$ и x_0^{-1}, то $x_0^{-1}=\sup(x^{-1}e_{x_0})$.

---

* Сходимость здесь и ниже понимается в смысле (0)-сходимости.

Следует из 17°

19° Пусть $x_0 = \sup A$ (или $\inf A$), $A = \{x\}$. Если x^{-1} существует для всех $x \in A$ и $|x^{-1}|$ ограничены, то x_0^{-1} существует.

Проведем доказательство для случая, когда $x_0 = \sup A$, $x > 0$. Остальные случаи сводятся к этому. Положим $y = \sup x^{-1}$. При каждом $x \in A$ существует $(x_0 \cdot e_x)^{-1} \leqslant y$. Положим $z = \sup\limits_{x \in A} (x_0 e_x)^{-1}$. Произведение $x_0 \cdot (x_0 e_x)^{-1} = e_x \leqslant e_{x_0}$, следовательно, по 13° существует $x_0 z$, а по 11° $x_0 z = e_{x_0}$, откуда $z = x_0^{-1}$.

20° Если $x_n \to 0$, а x_n^{-1} существуют и $|x_n^{-1}|$ ограничены, то $x_n^{-1} \to 0$.

Доказательство достаточно провести для случая, когда $x_n > 0$. Предположим, что $y_n = \sup (x_n^{-1}, x_{n+1}^{-1}, \ldots) \geqslant z > 0$. По 11° и 22° (1) существует $e \leqslant e_z$, $e > 0$, для которого $y_1 e < \beta e$, где $\beta > 0$. Положим $e_n = e_{x_n} \cdot e$. Тогда имеем $x_n^{-1} e_n < \beta e_n$. Но $\sup\limits_{n \geqslant k} e_n = e$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что при любом k

$$\sup (x_k, x_{k+1}, \ldots) \geqslant \frac{1}{\beta} e,$$

а это приводит к противоречию.

Доказанное 20° является частным случаем следующего предложения.

21° Если $x_n \to x_0$, а x_n^{-1} существуют и $|x_n^{-1}|$ ограничены, то x_0^{-1} существует и $x_n^{-1} \to x_0^{-1}$.

Сначала докажем существование x_0^{-1}. Для этого достаточно предполагать, что $x_n > 0$. Обозначим e_{x_n} и e_{x_0} через e_n и e_0 (соответственно) и положим $y_n = x_n e_0 + (e_0 - e_n e_0)$. Легко проверить, что $y_n \to x_0$. Затем имеем $y_n^{-1} = x_n^{-1} e_0 + (e_0 - e_n e_0)$ и пусть $y = \sup y_n^{-1}$. Очевидно, $e_{y_n} = e_y = e_0$, а по 8° $y_n \geqslant y^{-1}$. Следовательно, $x_0 \geqslant y^{-1}$ и, значит, x_0^{-1} существует.

После этого можно доказать, что $x_n^{-1} e_0 \to x_0^{-1}$. Затем имеем

$$x_n^{-1} = x_n^{-1} e_0 + \tilde{y}_n, \quad \text{где} \quad \tilde{y}_n = x_n^{-1} \cdot (\mathbf{1} - e_0).$$

Тогда по 10° и 15° $\tilde{y}_n^{-1} = x_n \cdot (\mathbf{1} - e_0) \to x_0 \cdot (\mathbf{1} - e_0) = 0$. Следовательно, по 20° $\tilde{y}_n \to 0$, а $x_n^{-1} \to x_0^{-1}$.

§ 4. Степень x^n (n — целое, положительное) можно определить по индукции: x^n существует и равно $x^{n-1} \cdot x$, если x^{n-1} и произведение $x^{n-1} \cdot x$ существуют. Из ассоциативности умножения [20° (1)] следует, что x^n можно рассматривать просто как произведение n множителей x, составленное любым способом.

22° Если $x^n \leqslant y$, то $x \leqslant \mathbf{1} + y$.

Пусть $x \geqslant 0$. Тогда $x = x_1 + x_2$, где $\inf (x_1, x_2) = 0$, причем $x_1 \leqslant e_{x_1}$, $x_2 \geqslant e_{x_2}$. Очевидно, $x^n = x_1^n + x_2^n$. Кроме того $x_2 \leqslant x_2^n \leqslant y$, следовательно, $x \leqslant \mathbf{1} + y$. В общем случае для доказательства нужно использовать формулу: $x^n = (x_+)^n + (-1)^n \cdot (x_-)^n$.

Определение. Пусть $x, y \geqslant 0$. Если $y^n = x$, полагаем $y = \sqrt[n]{x}$ (положительный корень).

23° Для всякого $x \geqslant 0$ положительный корень существует и притом только один.

Для доказательства положим y_0 равным supremum'у тех y, для которых $y^n \leqslant x$*. По 22° $0 \leqslant y_0 < \infty$. Легко убедиться, что y_0^n существует и $y_0^n \leqslant x$. Предположим, что $y_0^n < x$. Тогда для некоторых $e > 0$ и $\alpha, \beta > 0$ имеем

$$x - y_0^n > \alpha e \text{ и } y_0 e < \beta e.$$

* Ср. (2).

Пусть

$$\lambda = \min\left(\beta, \frac{\alpha}{n(2\beta)^{n-1}}\right).$$

Тогда

$$(y_0+\lambda e)^n - y_0^n = (y_0 e + \lambda e)^n - y_0^n e = n y_0^{n-1}\lambda e + \frac{n(n-1)}{2} y_0^{n-2}\lambda^2 e + \ldots <$$
$$< \left(n\beta^{n-1}\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\beta^{n-2}\lambda^2 + \ldots\right) e = [(\beta+\lambda)^n - \beta^n]\, e <$$
$$< n(\beta+\lambda)^{n-1}\lambda e \leqslant n(2\beta)^{n-1}\lambda e \leqslant \alpha e,$$

следовательно, $(y_0+\lambda e)^n \leqslant x$, что приводит к противоречию.

Пусть теперь $y^n = x$, $y \geqslant 0$. Очевидно, $y \leqslant y_0$. Предположим, что $y < y_0$. Тогда $y+\lambda e < y_0$ для некоторых $e > 0$ и $\lambda > 0$. Следовательно,

$$y^n + \lambda^n e \leqslant (y+\lambda e)^n \leqslant y_0^n = x,$$

откуда $y^n < x$, что невозможно.

24° Для всякого $x \geqslant 0$ $\sqrt[n]{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} e_x$, причем, если $x \leqslant e_x$, то $\sqrt[n]{x}$ не убывает, а если $x \geqslant e_x$, то $\sqrt[n]{x}$ не возрастает, когда n увеличивается от 1 до ∞.

§ 5. Здесь мы сделаем замечание по поводу единственности определения произведения в пространстве X. Именно, произведение определяется единственным образом, если на него наложить некоторые условия. Приведем наш результат. Предположим, что для некоторых пар элементов x, y пространства X определено произведение xy, обладающее свойствами 12°—17°, 20° и 21° ([1]). Кроме того можно рассматривать в X обратный элемент x^{-1}, сохраняя для него прежнее определение. Пусть обратный элемент обладает частью свойства 8°, именно, если x^{-1} существует, а $e_y = e_x$ и $|y| \geqslant |x|$, то y^{-1} существует. При этих предположениях можно установить, что это произведение xy существует тогда и только тогда, когда существует произведение, определенное в ([1]), и оба произведения совпадают*.

Ленинградский государственный университет

Поступило
19 I 1940

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, ДАН, XXVI, № 9, стр. 847 (1940). [2] S. W. P. Steen, Proc. Lond. Math. Soc., (2), 41, 361—392 (1936).

* Заметим, что об единственности произведения можно говорить лишь после того, как выбрана единица пространства.